**Note aux étudiants :**

**Lors du contrôle, l’usage du portable est strictement interdit. Chaque étudiant doit avoir sa propre calculatrice.**

**Le contrôle consistera en une série de petites questions de cours et un exercice d’application.**

**Exercices sur l’analyse non linéaire des structures**

EX1 : une barre encastrée aux deux extrémités est soumise à une charge axiale comme montré sur la figure 1.a. Les courbes contraintes-déformations et charge-temps sont montrées sur les figures 1.b et 1.c. respectivement. En supposant que les déplacements et les déformations sont petits et que la charge est progressivement appliquée, déterminer le déplacement au point d’application de la charge.



Figure 1

Du fait que les charges sont progressivement appliquées, on doit entreprendre une analyse statique, c'est-à-dire que l’effet du temps est négligeable. Les non-linéarités géométriques seront négligées car les déplacements et les déformations sont petits. Du fait que la courbe contraintes-déformations est non linéaire, les non-linéarités matérielles doivent être considérées.

Pour déterminer les réactions, on utilisera la méthode des éléments finis.

La barre de la figure 1.a sera discrétisée comme indiqué sur la figure 2 avec 2 éléments barres et 3 nœuds.

2

1

3

2

1

Figure 2 Modèle en éléments finis de la structure

La matrice de rigidité d’un élément barre est donnée par la relation :

$$ \frac{EA}{L} \left[\begin{matrix}1&-1\\-1&1\end{matrix}\right] $$

Où E : module de Young, A : section transversale de la barre, L : longueur de la barre.

Pour la barre 1 :

$$K\_{1}=\frac{10^{7}x 1}{10} \left[\begin{matrix}1&-1\\-1&1\end{matrix}\right]= 10^{6}\left[\begin{matrix}1&-1\\-1 &1\end{matrix}\right]$$

Pour la barre 2 :

$$K\_{2}=\frac{10^{7}x 1}{5} \left[\begin{matrix}1&-1\\-1&1\end{matrix}\right]$$

La matrice de rigidité globale est donnée par :

$$\left[K\right]\_{G}=\left[\begin{matrix}10^{6}&-10^{6}&0\\-10^{6}&10^{6}+200000&-200000\\&-200000&200000\end{matrix}\right] $$

Application des conditions aux limites.

Pour la barre 1, le nœud 1 est bloqué, donc le déplacement u1 est égal à zéro, donc il faut supprimer la première ligne et la première colonne de K1.

Pour la barre 2, le nœud 3 est bloqué, donc le déplacement u3 est égal à zéro, donc il faut supprimer la deuxième première ligne et la deuxième colonne de K2.

Donc il reste :

$$ 10^{6} U\_{2} +2 10^{6} U\_{2}= $$

Donc

$$ U\_{2}=\frac{}{3 10^{6}}$$

Les forces dans les éléments sont données par :

Elément 1 :

$$\left\{\begin{matrix}R\_{1}\\R\_{1}\end{matrix}\right\}= 10^{6} \left[\begin{matrix}1&-1\\-1&1\end{matrix}\right] \left\{\begin{matrix}0\\\frac{}{3 10^{6}}\end{matrix}\right\}$$

$$ R\_{1}=- \frac{}{3} ; R\_{1}=\frac{}{3}$$

Elément 2 :

$$\left\{\begin{matrix}R\_{2}\\R\_{2}\end{matrix}\right\}= 2 10^{6} \left[\begin{matrix}1&-1\\-1&1\end{matrix}\right] \left\{\begin{matrix}\frac{}{3 10^{6}}\\0\end{matrix}\right\}$$

$$ R\_{2}= \frac{2 }{3} ; R\_{2}=- \frac{2 }{3}$$

R1

R2

R2

R1

On peut constater que l’élément **a** est tendu et que l’élément **b** est comprimé, par convention, on suppose que l’élément comprimé a une valeur négative, donc :

$$R\_{1}= \frac{}{3} , R\_{2}= \frac{-2 }{3}$$

Les déformations pour les sections a et b sont données par :

$$=\frac{}{L\_{a}} =\frac{}{L\_{a}} $$

L’équation d’équilibre est :

$$+ A= A $$

Et les lois constitutives sont :

$ $ dans la zone élastique

$$ dans la zone plastique

Lors du déchargement qui est élastique, on a : $ Δε= \frac{Δσ}{E} $

En fonction de la valeur de la charge plusieurs cas sont possibles :

-1 les deux sections sont élastiques

Durant la phase initiale de l’application de la charge, les deux sections **a** et **b** sont élastiques. Donc on aura :

$$=EA $$

$$= \frac{}{3 x 10^{6}} $$

Avec :

$$=\frac{}{3A} =- \frac{2}{3}\frac{}{A} $$

La section **b** se plastifiera en premier lorsque $\geq σ\_{y}=E x ϵ\_{y}=10000000 x 0.002=20000 ^{N}/\_{cm^{2}}$ soit lorsque

 $\geq \frac{20000 x 3 x 1}{2}=30000 KN$

2- la section **a** est élastique alors que la section **b** est plastique

La section **b** se plastifiera à un certain temps t\* quand :

$$ = \frac{3}{2} $$

Donc on aura :

$$=E \frac{}{L\_{a}}$$

$$=-E\_{T}\left(\frac{}{L\_{b}}-ε\_{y}\right)- σ\_{y} $$

Lorsque $ t >t^{\*} $, on aura :

$$=\frac{EA}{L\_{a}}+ \frac{E\_{T}A}{L\_{b}}-E\_{T}ϵ\_{y}A+σ\_{y }A $$

Et donc :

$$= \frac{^{}/\_{A}+ E\_{T}ϵ\_{y}A-σ\_{y }A}{\frac{E}{L\_{a}}+\frac{E\_{T}}{L\_{a}}} $$

$$=\frac{}{1.02 x 10^{6}}-1.9412 x 10^{-2} $$

En déchargement, les deux sections se comportent élastiquement :

$$∆u = \frac{}{\frac{EA}{L\_{a}}+\frac{EA}{L\_{a}}} $$

On commence les calculs pour$$ < 30000 KN, donc les deux sections sont élastiques et $$ se calcule d’après la relation :

$$= \frac{}{3 x 10^{6}} $$

Pour $$ = 10000 N, on trouve :$ $= 0.0033 cm

Pour $$ = 20000 N, on trouve :$ $= 0.0066 cm d’après la relation ci-dessus. Cette valeur peut être directement déterminée en utilisant le principe de superposition qui est valable uniquement dans le domaine linéaire. Puisque 20000 N est égal à 10000 N x 2, il suffit donc de multiplier le déplacement $$ obtenu pour 10000 N par deux, ce qui donne :$ $= 0.033 x 2 = 0.0066 cm

Pour $$ = 30000 N, les relations $= \frac{}{3 x 10^{6}}$ et $=\frac{}{1.02 x 10^{6}}-19412 x 10^{-2} $aboutirons au même résultat car on a atteint le seuil de plastification.

La première relation donne : :$ $ = 0.0099 ≈0.01 cm

La seconde relation donne aussi :$ $ = 0.0099 ≈0.01 cm

Pour $$ = 40000 N, la section **a** est élastique alors que la section **b** est plastique, il faut donc utiliser la relation :

$$=\frac{}{1.02 x 10^{6}}-1.9412 x 10^{-2} $$

Et on trouve :

$$ = 0.0198 ≈0.02 cm

Lors du déchargement élastique de 40000 N à 20000 N par exemple, en utilisant la relation avec $∆R= -20000 N$:

$$∆u = \frac{∆R}{\frac{EA}{L\_{a}}+\frac{EA}{L\_{a}}} $$

$∆u $ = - 0.0066 cm

Et donc

$$=0.02-0.066=0.134 cm$$

La réponse calculée peut être schématisée par la courbe chargement-déplacement suivante, figure 3 :



Figure 3 Courbe déplacement-chargement

EX2 : Calculer la réponse de la structure de l’exercice 1 en utilisant la méthode de Newton-Raphson modifiée. Appliquer la charge en deux incréments égaux pour atteindre la charge maximale.

Dans la méthode de Newton-Raphson modifiée, on actualisera la matrice de rigidité au début de chaque incrément.

Donc les équations itératives à utiliser sont :

$$ \left(\right) ∆u^{\left(i\right)}= -- $$

$$ + ∆u^{\left(i\right)}$$

Avec

$$ $$

$$ et $$

$= \frac{}{L\_{a}}$ et $= \frac{}{L\_{b}}$

Où :

$$ \left\{\begin{matrix}=E si la section est élastique\\= E\_{T} Si la section est plastique\end{matrix}\right.$$

Pour une section élastique on a :$ $

$$= EA $$

Pour une section plastique on a :

$$ = A\left[E\_{T }\left(\right)+σ\_{y}\right]$$

et les déformations sont :

$$ \frac{}{L\_{a}}$$

$$ \frac{}{L\_{b}}$$

Pour le premier incrément de chargement, on a t = 0 , Δt = 1 , $=20000 N$ , $=0$ ; $$= 0 , $$ = 0

Donc on peut écrire :

$$\left(\right) ∆u^{\left(1\right)}= -- $$

$$ ∆u^{\left(1\right)}= \frac{20000}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.0066 cm$$

(i = 1) $ = + ∆u^{\left(1\right)}=0.0+0.006667=0.006667 cm $

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.0066}{10}$ = 0.0006667 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.00667}{5}$ = 0.0013334 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$1x $107 x 0.006667 = 6667 N

$$107 x 0.00132 = 13333 N

$$\left(\right) ∆u^{\left(2\right)}= -- =20000-6667-13333=0$$

Donc

$∆u^{\left(2\right)}$ = 0

La solution a convergé en une seule itération, et ceci était prévisible car les sections **a** et **b** étaient élastiques. $= 0.006667 cm $

t = 2 $= 0.00667 cm$, $$ $==6667 N$,$ $ $ =13333 N$

Le chargement $$ est égal maintenant égal à 40000 N,$ $ $==6667 N$,$ $ $ =13333 N$

$= \frac{}{L\_{a}}$ $= \frac{}{L\_{b}}$

$$ $$

$$\left(\right) ∆u^{\left(1\right)}= -- $$

$$∆u^{\left(1\right)}= \frac{20000}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.006667 cm$$

$$= + ∆u^{\left(1\right)}=0.006667+ 0.006667=0.013333 cm $$

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.0133334}{10}$ = 0.0013334 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.0133}{5}$ = 0.0026668 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 x 0.00133 = 13333 N

$$= 1\left[106\_{ }\left(0.002668-0.002\right)+20000\right]=20068 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(2\right)}= -- $$

$$∆u^{\left(2\right)}= \frac{6599}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.0022 cm$$

i = 2

 $= + ∆u^{\left(2\right)}=0.013334+ 0.002=0.01553 cm $

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.01553}{10}$ = 0.001553 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.01553}{5}$ = 0.00311 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 x 0.00153 = 15530 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.00311-0.002\right)+20000\right]=20111 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(3\right)}= -- $$

$$∆u^{\left(3\right)}= \frac{4539}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.00145 cm$$

I = 3

$$= + ∆u^{\left(3\right)}=0.01553+ 0.00145=0.016984 cm $$

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.016984}{10}$ = 0.0016984 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.016984}{5}$ = 0.0033968 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 x 0.00165 = 16984 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.0033-0.002\right)+20000\right]=20140 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(4\right)}= -- $$

$$∆u^{\left(4\right)}= \frac{2876}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.00096 cm$$

I = 4

$$= + ∆u^{\left(4\right)}=0.016984+0.00096=0.0179 cm$$

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.0179}{10}$ = 0.00179 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.0179}{5}$ = 0.00358 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 x 0.00172 = 17900 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.00358-0.002\right)+20000\right]=20158 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(5\right)}= -- $$

I = 5

$$∆u^{\left(5\right)}= \frac{1881}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.000647 cm$$

$$= + ∆u^{\left(5\right)}=0.01796+ 0.000647=0.0185 cm$$

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.0185}{10}$ = 0.001859 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.0185}{5}$ = 0.00370 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$1x$107 x 0.00172 = 18590 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.0037-0.002\right)+20000\right]=20170 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(6\right)}= -- $$

I=6

$$∆u^{\left(6\right)}= \frac{1238}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.000413 cm$$

$$= + ∆u^{\left(6\right)}=0.0185+ 0.000413=0.0189 cm$$

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.0189}{10}$ = 0.00189 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.0159}{5}$ = 0.00378 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 x 0.00172 = 18900 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.00378-0.002\right)+20000\right]=20185 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(6\right)}= -- $$

I = 7

$$∆u^{\left(7\right)}= \frac{545}{10^{7}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)}= 0.000182 cm$$

$$= + ∆u^{\left(6\right)}=0.0189+ 0.000182=0.01945 cm$$

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.01945}{10}$ = 0.001945 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.017689}{5}$ = 0.00389 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 x 0.00172 = 19450 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.00389-0.002\right)+20000\right]=20189 N$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(6\right)}= -- $$

Donc on constate qu’on se rapproche lentement de la solution exacte (on converge lentement car on a utilisé la méthode de Newton-Raphson modifiée) et donc il faut itérer davantage. Maintenant, si à la seconde itération on utilise la méthode de Newton-Raphson c’est-à-dire qu’on actualise la matrice de rigidité car la section **b** s’est plastifiée lors de la première itération, on obtient :

$$∆u^{\left(2\right)}= \frac{6599}{\left(\frac{10^{7}}{10}+\frac{10^{5}}{5}\right)}= 0.0065 cm$$

i = 2

 $= + ∆u^{\left(2\right)}=0.013334+ 0.0065=0.0198 cm $

$ \frac{}{L\_{a}}= \frac{0.0198}{10}$ = 0.00198 < $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est élastique

$ \frac{}{L\_{b}}= \frac{0.01553}{5}$ = 0.00395 > $ϵ\_{y}=0.002$ donc la section est plastique

$$107 0.00153 = 19800 N

$$ 1\left[106\_{ }\left(0.00311-0.002\right)+20000=20195 N\right]$$

$$\left(\right) ∆u^{\left(3\right)}= -- $$

Donc, on a convergé à la deuxième itération comme espéré car la méthode de Newton-Raphson totale converge plus rapidement que la méthode de Newton-Raphson modifiée.

***Donc dans la méthode de Newton-Raphson totale, on actualise la matrice de rigidité pour chaque incrément et pour chaque itération.***