

Chapitre 3 : DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides *en mouvement*. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

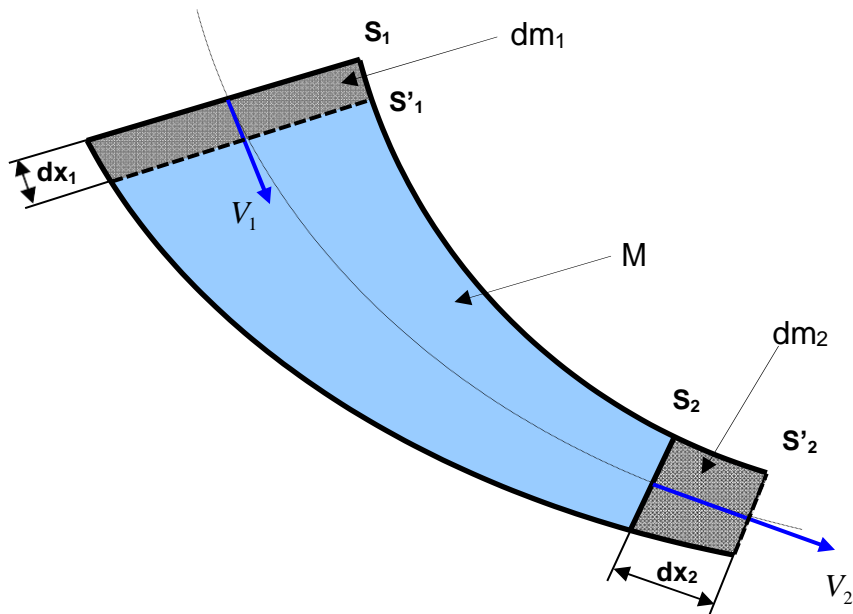
- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

2 ECOULEMENT PERMANENT

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace. L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

3 EQUATION DE CONTINUITÉ

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,
- \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 ,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1+ M)$

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M+ dm_2)$.

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$$dm_1 = dm_2 \text{ Donc } \rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2 \text{ ou encore } \rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2,$$

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à

l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2} \quad (1)$$

4 NOTION DE DEBIT

Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend

vers 0.

$$\boxed{q_m = \frac{dm}{dt}}$$

où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s)

en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \quad (2)$$

avec :

$$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \|\vec{V}_1\| : \text{Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers } S_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \|\vec{V}_2\| : \text{Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers } S_2$$

D'après (2) :

$$q_m = \rho \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho \cdot S_2 \cdot V_2$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (3)$$

où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m³)

S : Section de la veine fluide en (m²)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,

- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation (3) et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$ on peut écrire également que

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} \text{ soit}$$

$$q_v = S \cdot V$$

Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$q_m = \rho \cdot q_v$$

5 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT SANS ECHANGE DE TRAVAIL

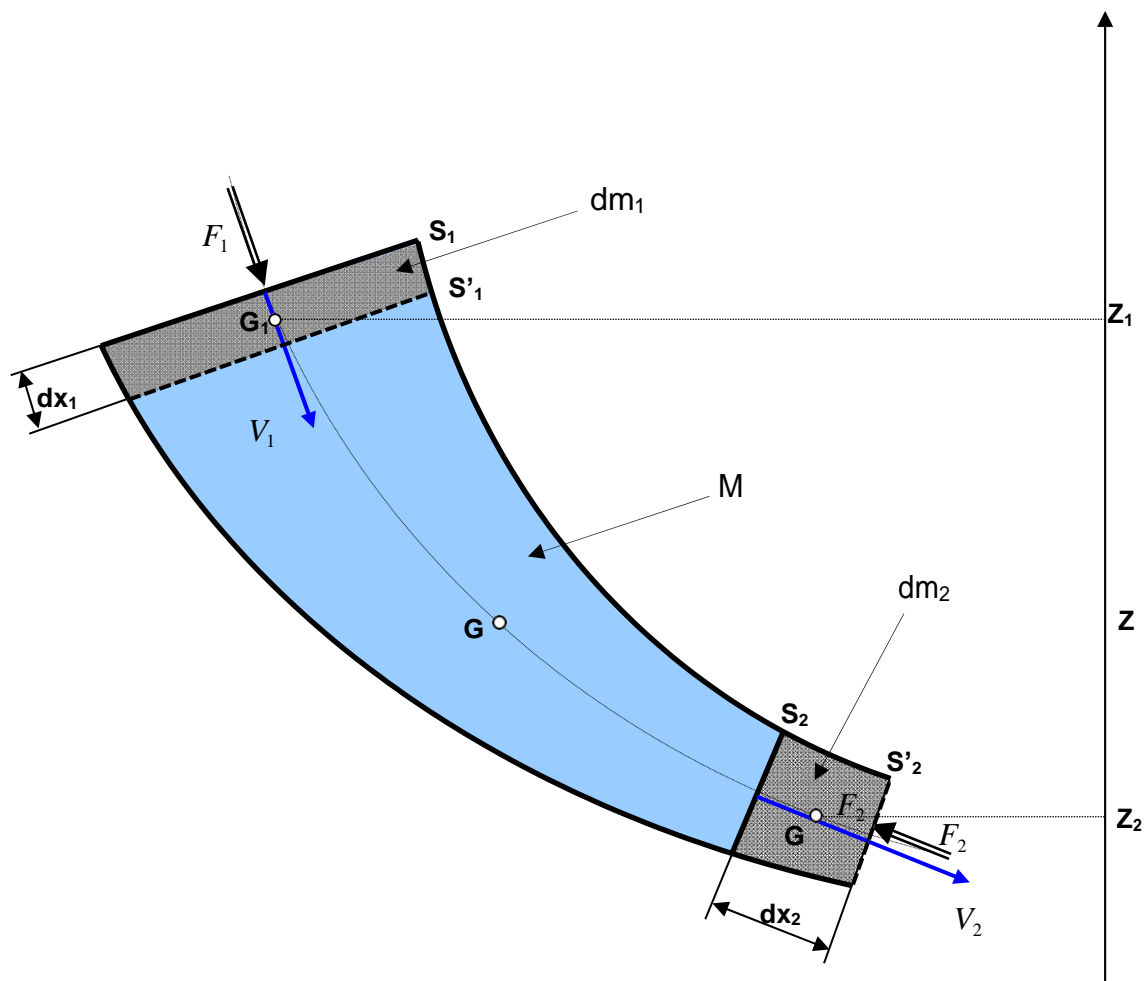
Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe Z vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .



A l'instant t le fluide de masse ($dm_1 + M$) est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie

$$\text{mécanique est : } E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2} dm_1 V^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse ($M+dm_2$) est compris entre S'_1 et S'_2 . Son

$$\text{énergie mécanique est : } E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 V^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{\text{Forces de pression}} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 \Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2$$

$$\text{en simplifiant on obtient : } dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0} \quad (4)$$

6 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN COULEMENT AVEC ECHANGE DE TRAVAIL

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2 . Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$$

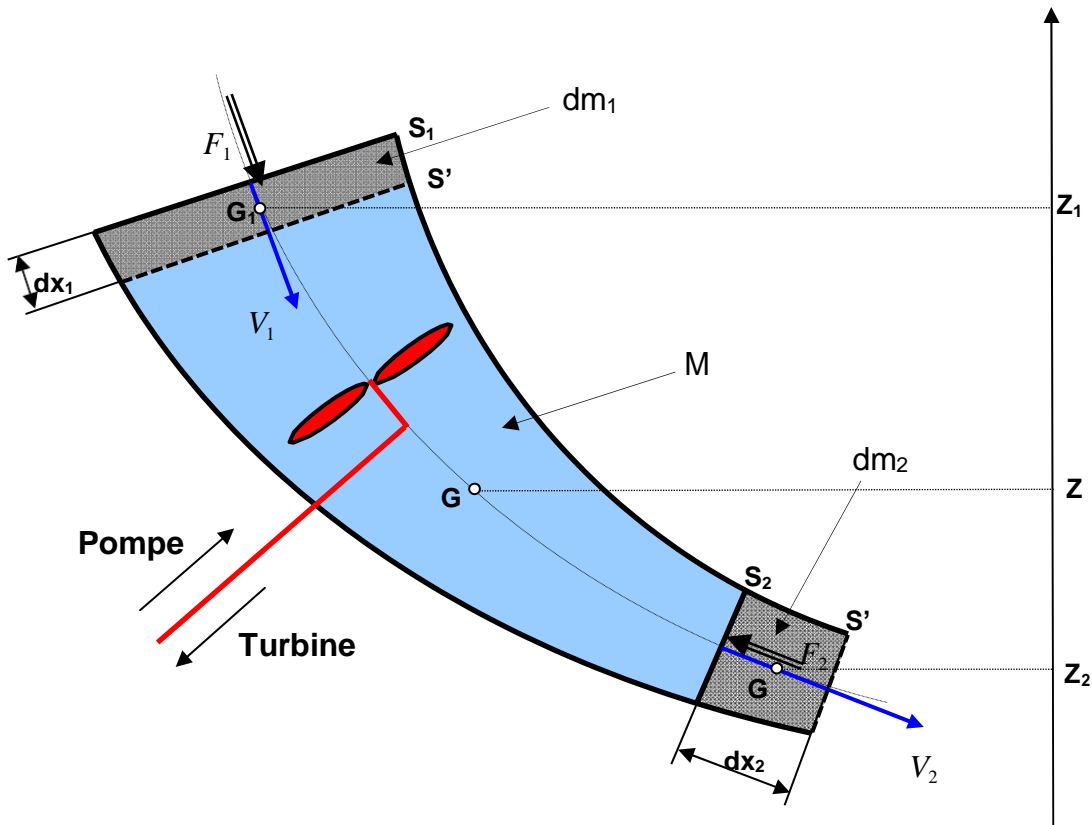
- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$$

Entre les instant t et $t'=(t+dt)$, le fluide a échangé un travail net $W_{net} = P_{net} \cdot dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$



A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son

énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^S \frac{dm V^2}{2} + \frac{1}{2} dm \cdot V^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. », en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$$E'_{mec} - E_{mec} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt$$

$$E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + P_{net} \cdot dt \text{ en simplifiant on aura :}$$

$$dm \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm \cdot V_2^2 - dm \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm + P_{net} \cdot dt \text{ Par conservation}$$

de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

on aboutie à l'équation de Bernoulli
$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{nt}}{q_m}$$

ρ

q_m

Chapitre 4 : DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES REELS

1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un **fluide réel** est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique **Osborne Reynolds**.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

2 FLUIDE REEL

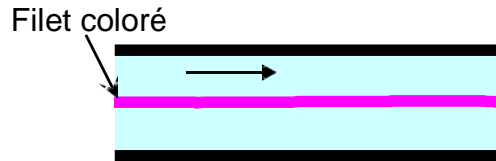
Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

3 REGIMES D'ECOULEMENT - NOMBRE DE REYNOLDS

Les expériences réalisées par **Reynolds** en 1883 lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : régime laminaire et régime turbulent :

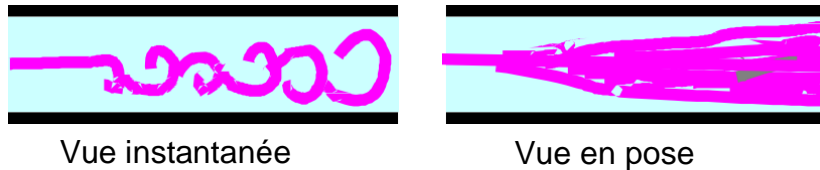
- Régime laminaire :

Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.



- Régime turbulent :

Les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes.



Des études plus fines ont montré qu'il existe encore une subdivision entre :

- les écoulements turbulents lisses et
- les écoulements turbulents rugueux.

La limite entre ces différents types d'écoulements est évidemment difficile à appréhender.

En utilisant divers fluides à viscosités différentes, en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds donné par l'expression suivante:

$$R_e = \frac{V \cdot d}{\nu}$$

- V : Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en (m/s)
- d : Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en (m).
- ν : Viscosité cinématique du fluide (m²/s).

Résultats empirique à titre indicatif :

Si $R_e < 2000$ l'écoulement est laminaire

Si $R_e > 2000$ l'écoulement est turbulent :

- Lisse si $2000 < R_e < 100000$
- Rugueux si $R_e > 100000$

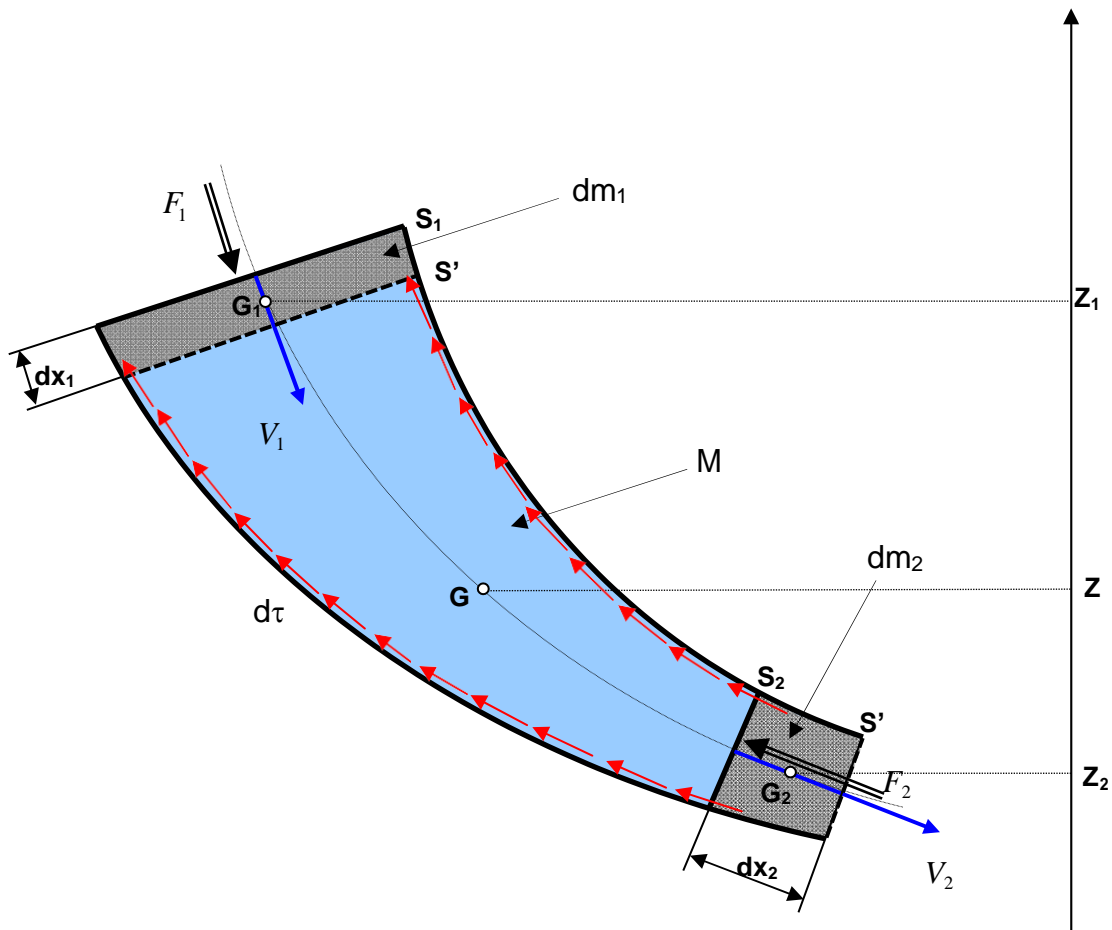
4 PERTES DE CHARGES

Définition

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite, tel que entre les points (1) et (2) il n'y ait pas de machine hydraulique.

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 du chapitre 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est réel et incompressible : cela suppose l'existence de forces élémentaire de frottement visqueux $d\tau$ qui contribue dans l'équation de bilan par un travail négatif et donner naissance à des pertes de charges.
- L'écoulement est permanent.



On considère un axe Z vertical dirigé vers le haut. On désigne par Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie

$$\text{mécanique est : } E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2} dm_1 V^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son

$$\text{énergie mécanique est : } E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 V^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :

« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures ». On prendra en considération cette fois ci le travail des forces de frottement visqueux $d\tau$.

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{\text{Forces de pression}} + \sum W_{d\tau} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + \sum W_{d\tau}$$

$$\Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + \sum W_{d\tau} = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + \sum W_{d\tau}$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \cdot dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} \cdot dm_2 + \sum W_{d\tau}$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$

Et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

on aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V^2 - V'^2}{2} + \frac{P - P'}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$$

On défini la perte de charge entre les points (1) et (2) par $J_{12} = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$ qui est la

perte d'énergie par frottement visqueux par unité de masse qui passe.

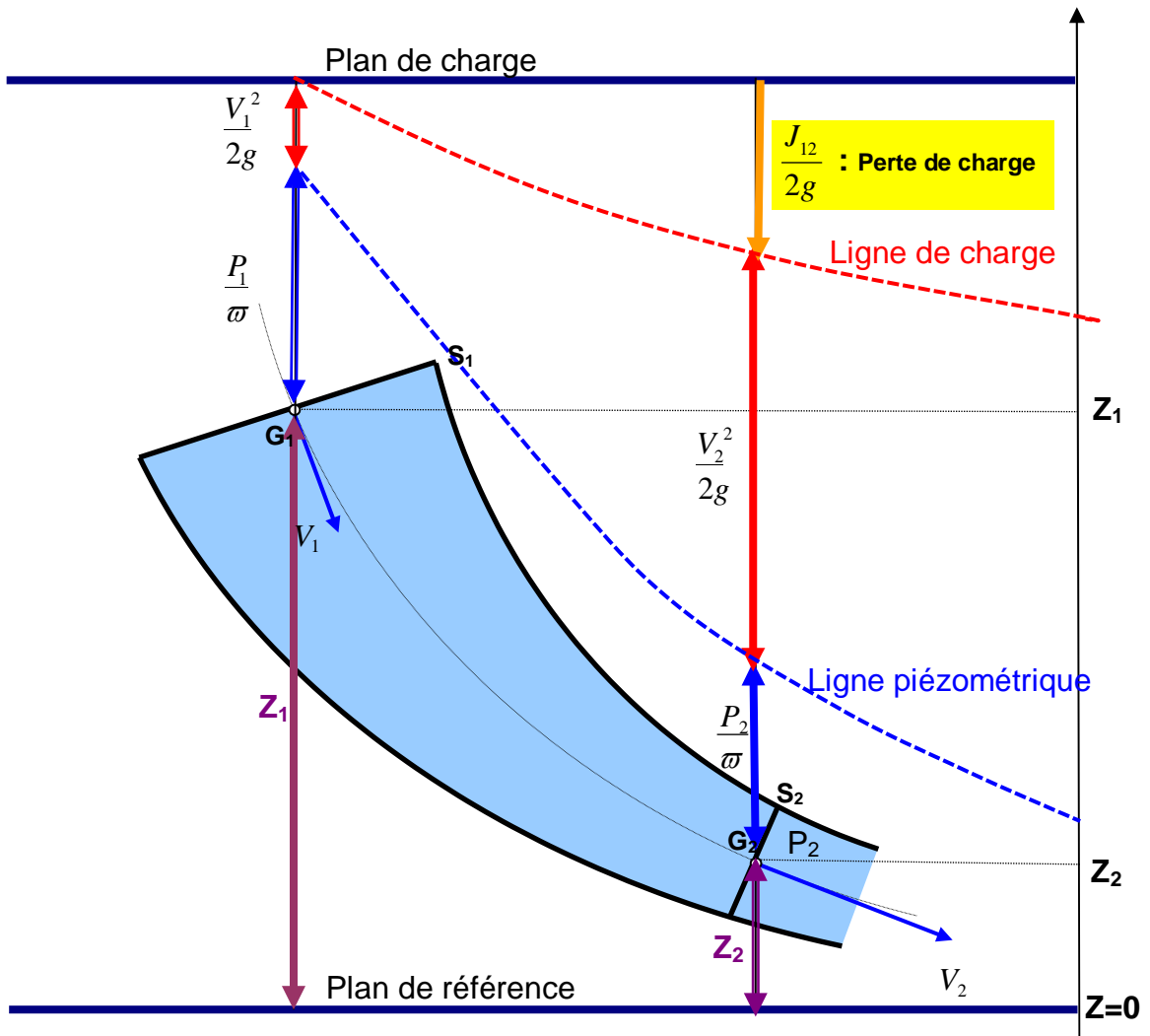
$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = J_{12} \quad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg)

En divisant par g la relation (4) devient homogène à des longueurs en mètre :

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\varpi} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \frac{J_{12}}{g}$$

Elle peut être interprétée graphiquement de la manière suivante :



Portons sur la verticale, à partir du centre de gravité G_1 de la section S_1 une distance égale à $\frac{P_1}{\varpi}$. Le lieu de toutes les extrémités de ces segments s'appelle

ligne piézométrique.

Portons sur la verticale au dessus de la ligne piézométrique la quantité $\frac{V^2}{2.g}$. Le lieu

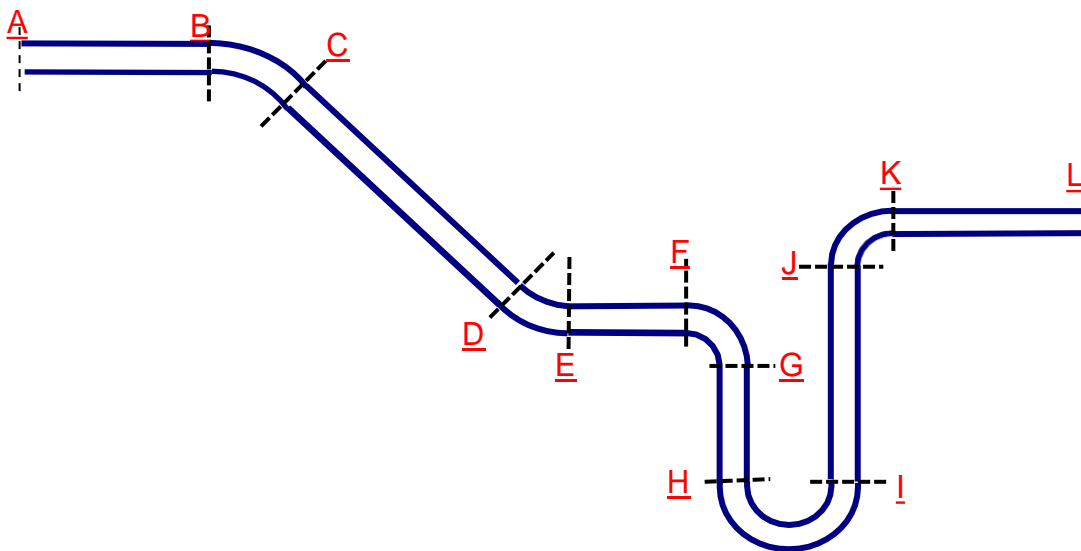
de toutes les extrémités de ces segments représente **la ligne de charge**.

En l'absence de pertes de charge, la ligne de charge est confondue avec le plan de charge. Ce plan de charge donne une représentation graphique de la constance tirée de l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait. La perte de charge totale exprimée en hauteur de liquide depuis le début de l'écoulement, est égale à la distance entre la ligne de charge et le plan de charge, mesurée sur la verticale passant par le point G_1 . La perte de charge entre deux points G_1 et G_2 de l'écoulement est donnée par la différence de cote de la ligne de charge sur les verticales passant par les points précédents.

La perte de charge J_{12} peut être due à une perte de charge linéaire et une perte de charge singulière :

$$J_{12} = J_s + J_L$$

Par exemple, dans le circuit représenté dans la figure ci-dessous, les tronçons BC, DE, FG, HI et JK sont des coudes de différents angles, donc elles présentent des pertes de charge singulières. Les tronçons AB, CD, EF, GH, IJ et KL sont des conduites rectilignes, donc elles présentent des pertes de charge linéaires.



Pertes de charge singulières

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction, il se produit des pertes de charges dites singulières, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation.

On les exprime par :

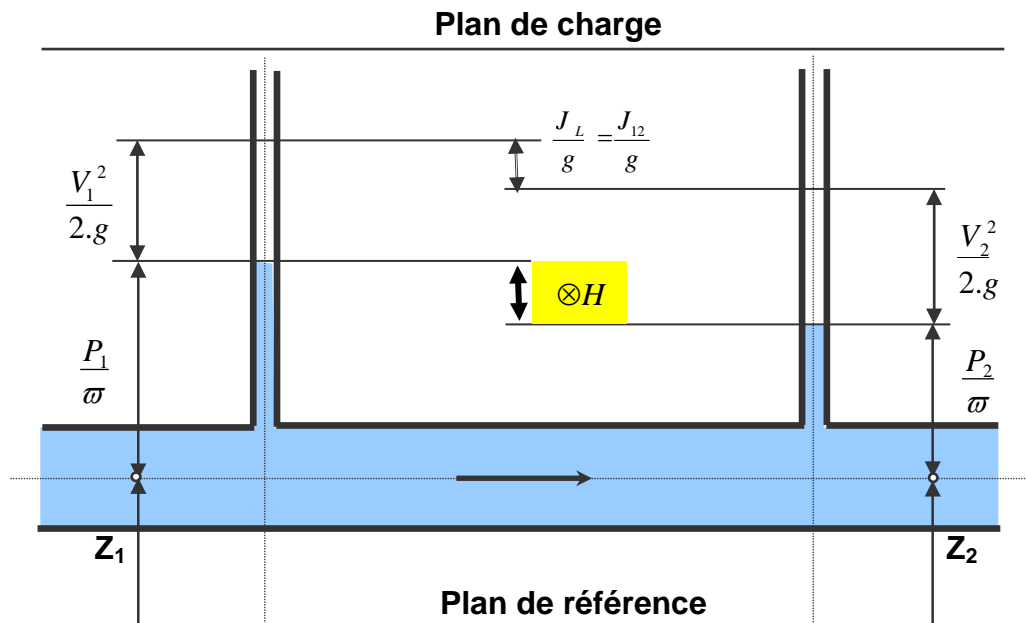
$$J_s = -K_s \cdot \frac{V^2}{2} \text{ où } s : \text{ indice de l'accident de forme de la conduite.}$$

K_s : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme.

Les valeurs de K_s sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

Pertes de charges linéaires :

Les pertes de charges linéaires, sont des pertes de charge réparties régulièrement le long des conduites. En chaque point d'un écoulement permanent, les caractéristiques de l'écoulement sont bien définies et ne dépendent pas du temps. La représentation graphique de l'écoulement prend l'allure ci-dessous.



La vitesse étant constante, la ligne piézométrique et la ligne de charge sont parallèles. La variation de hauteur piézométrique, évaluée en hauteur de liquide est égale à la perte de charge linéaire entre les deux points de mesure.

Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur L de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre d , proportionnelle au carré de la vitesse débitante V du fluide.

$$J_L = -\lambda \cdot \frac{V^2 L}{2 d} \quad \text{où}$$

- V : vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s)
- L : longueur de la conduite (m)
- d : diamètre de la conduite (m)
- λ : coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement et notamment du nombre de Reynolds R_e .

Dans un régime d'écoulement laminaire : $R_e < 2000$

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \quad (\text{Formule de Poiseuille})$$

Dans un régime d'écoulement turbulent lisse : $2000 < R_e < 10^5$

$$\lambda = 0,316 \cdot R_e^{-0,25} \quad (\text{Formule de Blasius})$$

Dans un régime d'écoulement turbulent rugueux : $R_e > 10^5$

$$\lambda = 0,79 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} \quad (\text{Formule de Blench})$$

avec :

- ε : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)
- d : diamètre intérieur de la conduite (mm)

Parfois, on lit la valeur de λ sur un abaque établie par Moody.

5 THEOREME DE BERNOULLI APPLIQUE A UN FLUIDE REEL

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite. On suppose éventuellement, qu'il existe entre (1) et (2) des machines hydrauliques.

On note :

J_{12} : Somme de toutes les pertes de charge, singulière et linéaires entre les sections (1) et (2).

P_n : Puissance mécanique échangé entre le fluide et les machines éventuellement placées entre (1) et (2).

Le Théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante :

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho} \cdot (P_2 - P_1) + g \cdot (z_2 - z_1) = J_{12} + \frac{P_n}{q^m}$$