chapitre 04 : Les lignes d'influence

3.1. Introduction :

Jusqu'à present nous avons étudié des structures soumises à des charges imobiles, mais il existe de nombreux cas où les constructions supportent des charges mobiles.

L'exemple le plus connu est celui des ponts. le chargement mobile étant dans ce cas representé par l'action de circulation des véhicules, citons les ponts roulants qu'on rencontre dans les ateliers de fabrication le chariot, qui déplace des pièces d'un point à un autre de l'atelier, se meut sur des rails fixés à des poutres.

3.2. Principe de la charge mobile :

Quand une charge (chargement) est mobile, c'est-à-dire pouvant occuper n'importe quelle position sur la poutre, pour une grandeur donnée, quelle est la position de la charge (chargement) qui provoque la plus grande valeur de la grandeur étudiée.

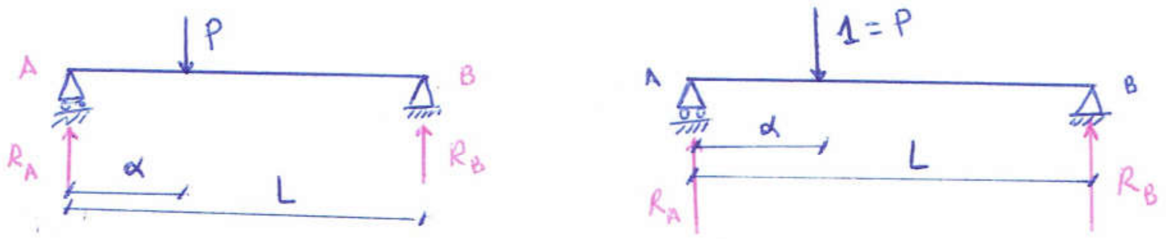
Cette grandeur Peut être un déplacement d'une Section, réaction d'un appui, moment fléchissant ou un effort tranchant,
il S'agit donc de trouver la position de la charge (changement) qui provoque l'effet maximum

3.3. Définition de la linge d'influence:

une ligne d'influence est la representation graphique de la variation d'un effet en un point donné en fonction de la position d'une charge unitaire mobile se déplaçant sur la Structure. (Poutre), cet effet désigne une réaction d'appui, un effort (tranchant et moment fléchissant) ou un déplacement.

3.4. Les lignes d'influences d'une Poutres isostatique:

Dans cette étude on se limitera aux lignes d'influence d'une Poutre isostatique sur 2 appuis Simples, sur laquelle est placée une force Verticale unité (P=1) à l'abscisse α, puis on déterminera la réaction à un appui, ou encore les efforts interieurs dus à cette force en un point x donné de la poutre, la charge (la force) verticale unitaire étant mobile.

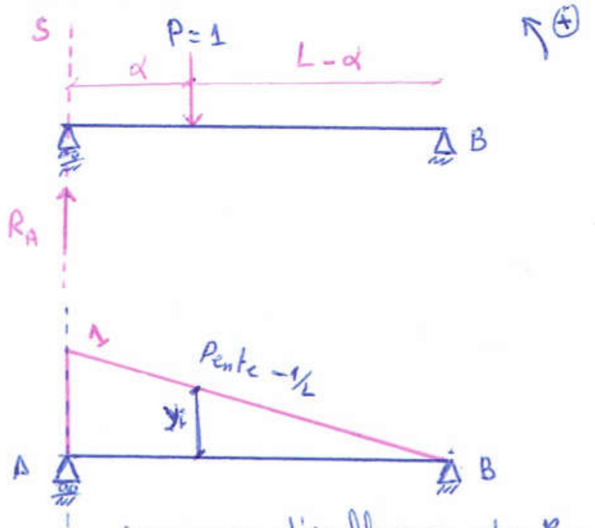


" Schéma Statique de la poutre"

3.4.1. Les lignes d'influence des réactions sous charge concentrée:

Pour une charge ponctuelle P à la position α on cherche à mesurer dans une Section (S) quelconque d'abscisse x, l'effet de cette charge mobile.

a/ Ligne d'influence de la réaction d'appui (A):



Ligne d'influence de R_A

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow -R_A \cdot L + \overset{1}{P}(L-\alpha) = 0$$

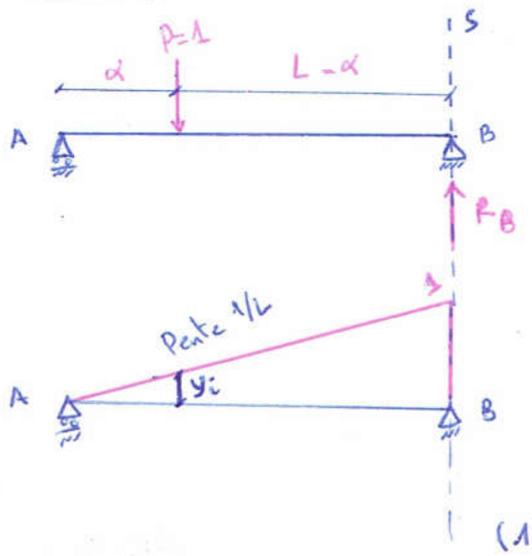
$$\Rightarrow \boxed{R_A = P\left(\frac{L-\alpha}{L}\right)} \Rightarrow \boxed{R_A = 1\left(\frac{L-\alpha}{L}\right)}$$

$\alpha = 0 \longrightarrow R_A = 1$

$\alpha = L \longrightarrow R_A = 0$

$R_A =$

b/ Ligne d'influence de la réaction d'appui (B):



$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_B \cdot L - P\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_B = \overset{1}{P} \cdot \frac{\alpha}{L} = 1 \cdot \frac{\alpha}{L}}$$

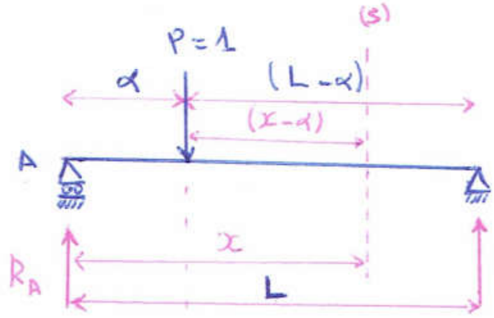
$\alpha = 0 \longrightarrow R_B = 0$

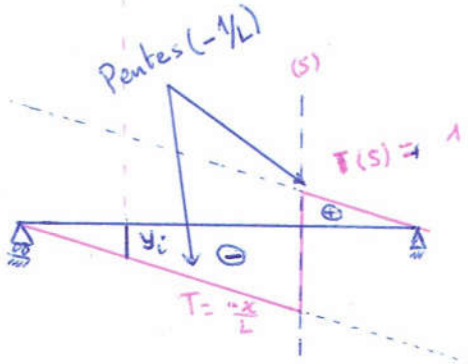
$\alpha = L \longrightarrow R_B = 1$

Ligne d'influence de R_B

avec $\frac{L-\alpha}{L}$ "y_i" et $\frac{\alpha}{L}$ "y_i" sont les coefficient d'influence de R_A et R_B respectivement.

3.4.2. Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une Section (S) d'abscisse x :





$\alpha < x$ (charges à gauche de (S))

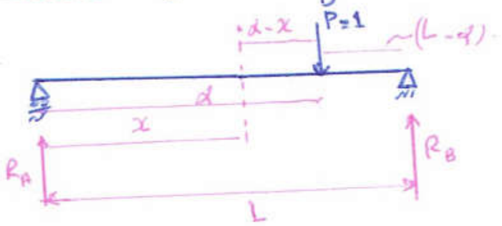
$$T + P - R_A = 0$$

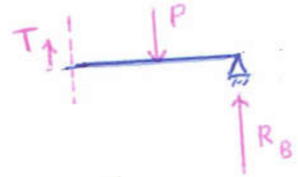
$$\Rightarrow T = R_A - P = P\left(\frac{L-\alpha}{L}\right) - P$$

$$T(\alpha) = P\left[\frac{L-\alpha}{L} - 1\right]$$

$$T(\alpha) = P\left[\frac{\cancel{L} - \alpha - \cancel{L}}{L}\right] = \overset{=1}{P}\left(-\frac{\alpha}{L}\right)$$

$\alpha > x$ (La charge à droite de (S))





$$T - P + R_B = 0$$

$$\Rightarrow T = P - R_B = P - P.\frac{\alpha}{L}$$

$$T(\alpha) = \overset{=1}{P}\left(1 - \frac{\alpha}{L}\right)$$

Donc :

$$T(\alpha) = \begin{cases} \overset{=1}{P}\left(-\frac{\alpha}{L}\right) = -\frac{\alpha}{L} \longrightarrow \alpha < x \\ \overset{=1}{P}\left(1-\frac{\alpha}{L}\right) = 1 - \frac{\alpha}{L} \longrightarrow \alpha > x \end{cases}$$

$$T(\alpha) = P.\,Li(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} Li(\alpha) = \frac{-\alpha}{L} \text{ pour } \alpha < x \\ Li(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{L} \text{ pour } \alpha > x \end{cases}$$

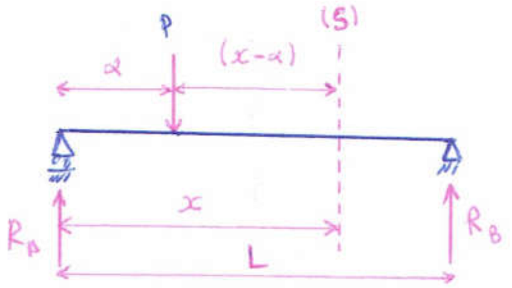
avec : $Li(\alpha)$: coefficient d'influence de l'effort tranchant

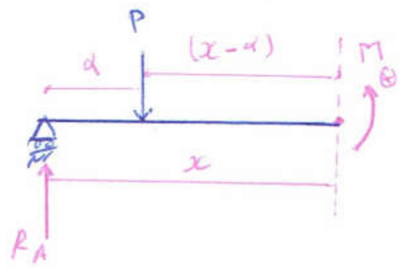
$$\alpha < x \begin{cases} \text{Si } \alpha = 0 \longrightarrow T(0) = 0 \\ \text{Si } \alpha = x \longrightarrow T(x) = -\frac{x}{L} \end{cases}$$

$$\alpha > x \quad \begin{array}{l} \text{Si } \alpha = x \longrightarrow T(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ \text{Si } \alpha = L \longrightarrow T(L) = 0 \end{array}$$

3.4.3. Ligne d'influence du moment fléchissant d'une Section (S) d'abscisse x :

$\alpha < x$: (La charge à gauche de (S))





- $M + P(x-\alpha) - R_A x = 0$

$M = P(\;\;)$

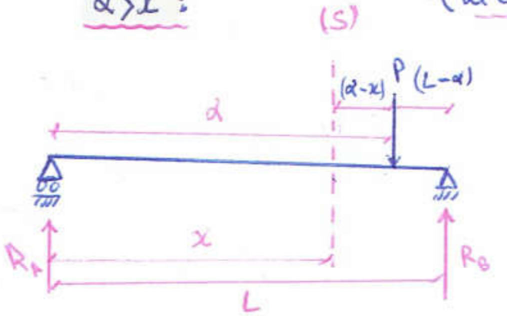
$M = P\left[\frac{(L-\alpha)}{L}\cdot x - (x-\alpha)\right]$

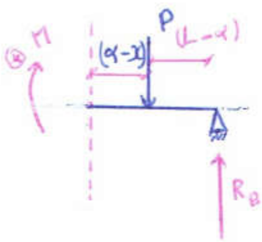
$M = P\left[\frac{Lx - \alpha x}{L} - \frac{Lx - L\alpha}{L}\right]$

$M = P\left[\frac{\cancel{Lx} - \alpha x - \cancel{Lx} + L\alpha}{L}\right]$

$M = P\cdot\frac{\alpha}{L}\,(L - x)$

$\alpha > x$: (la charge à droite de (S))



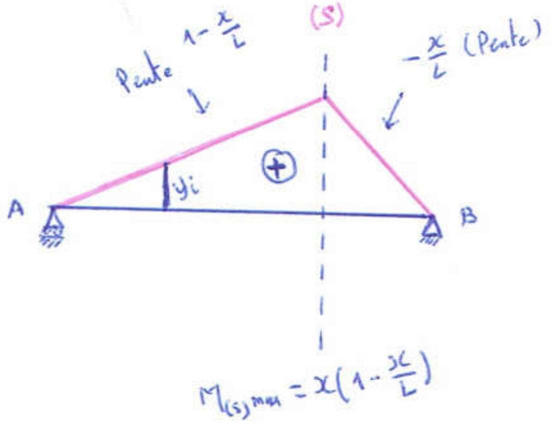


- $M + P(\alpha - x) - R_B(L-x)$

$M = \frac{P\alpha}{L}(L-x) - P(\alpha - x)$

$M = \cancel{P\alpha} - \frac{P\alpha}{L}x - \cancel{P\alpha} + Px$

$M = Px\left[1 - \frac{\alpha}{L}\right]$



Donc :

$$M_{(s)}(\alpha) = \begin{cases} P.\frac{\alpha}{L}(L-x) & \text{pour } \alpha < x \\ Px\left(1-\frac{\alpha}{L}\right) & \text{Pour } \alpha > x \end{cases}$$

$$M_{(s)}(\alpha) = \overset{1}{P}.Li(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} Li(\alpha) = \frac{\alpha}{L}(L-x) \\ Li(\alpha) = x\left(1-\frac{\alpha}{L}\right) \end{cases}$$

avec : $Li(\alpha)$ coefficient d'influence du moment fléchissant.

$\alpha < x$ $\begin{cases} \text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow M = 0 \\ \text{Si } \alpha = x \Rightarrow M = x\left(1-\frac{x}{L}\right) \end{cases}$

$\alpha > x$ $\begin{cases} \text{Si } \alpha = x \Rightarrow M = x\left(1-\frac{x}{L}\right) \\ \text{Si } \alpha = L \Rightarrow M = 0 \end{cases}$

« Effet d'une charge »

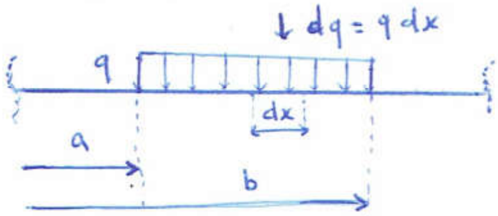
3.4.3. Lecture d'une ligne d'influence :

Si P est une charge concentrée, l'effet de cette charge :

$$\boxed{\text{Effet} = P \cdot y_i}$$

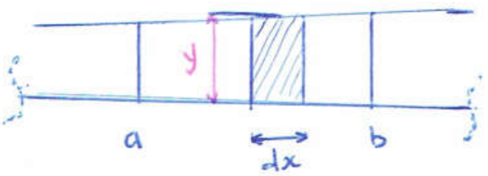
avec y_i : lecture directe sur la ligne d'influence.

3.4.4. Pour une charge uniformément répartie :

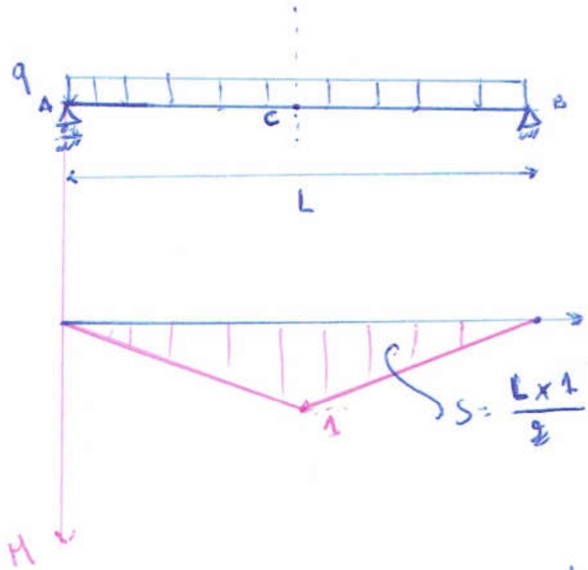


$$\text{Effet} = \int q \cdot y \cdot dx = q \int_a^b y \cdot dx$$

avec : $\int_a^b y \cdot dx$: l'aire sous la courbe de la ligne d'influence.



Exemple :



Ligne d'influence de M_c.

$$M_c = q \cdot \int_0^L y \cdot dx = q \cdot \frac{L \times 1}{2}$$

$$M_c = q \cdot \frac{L}{2}$$

Si $q = 20$ kN. et $L = 4$ m.

$$M_c = 20 \cdot \frac{4}{2} = 40 \text{ kN}.$$

Moment$_{max}$ d'une charge répartie : $M = \frac{qL^2}{8}$

$$M = \frac{20 \cdot (4)^2}{8} = 40 \text{ kN}.$$