Chapitre 03 : Système hyperstatique

1/ Généralité

2/ Degré d'hyperstaticité

3/ Méthode des forces

4/ Application aux portiques hyperstatiques

4.1/ Généralité :

On appelle système hyperstatique, les systèmes dont les réactions aux appuis ne peuvent pas être déterminées par les seules équations de la statique, les exemples des système hyperstatique sont nombreux, la majorité des structures portantes de génie civil sont hyperstatique comme les portiques auto-stable, les poutres continues sur plusieurs appuis.

4.2/ Liaisons surabondantes :

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons qu'il faudrait supprimer à un système hyperstatique pour obtenir une structure isostatique (géometriquement stable). leur nombre represente le degré d'hyperstaticité du système.

On peut classer les liaisons surabondantes en deux groupe : les liaisons surabondantes exterieures et liaison

Surabondante interieures

- Liaison surabondantes exterieures : Sont celles qui se trouvent dans les appuis.
- Liaison surabondantes interieures : Sont celle qui proviennent de la conception interieure du système.

4.3/ Calcul du degré d'hyperstaticité :

Le nombre de liaisons surabondante constitue le degré d'hyperstaticité de la structure. il existe plusieurs méthodes pour déterminer le degré d'hyperstaticité, parmi ces méthodes la méthodes de la suppréssion des liaisons, cette méthode consiste à suprimer les liaisons jusqu'à ce que la structure devienne isostatique, le nombre de liaisons suprimées representes le degré d'hyperstaticité.

$$\boxed{d = \sum li - 3b}$$

avec : d : degré d'hyperstaticité

li : liaisons (exterieur + interieur) ; b : nombres des barres.

$$\boxed{\sum li = li_{ext} + li_{int}}$$

li_{ext} : nombre des liaisons sur appuis (réaction d'appuis)

li_{int} : nombre des liaisons entre les barres.

$$\boxed{li_{int} = 3(b-1)}$$ avec b : nombre des barres.

* degré d'hyperstaticité exterieure :

$$\boxed{d_{ext} = \sum li_{ext} - 3}$$

* degré d'hyperstaticité interieure :

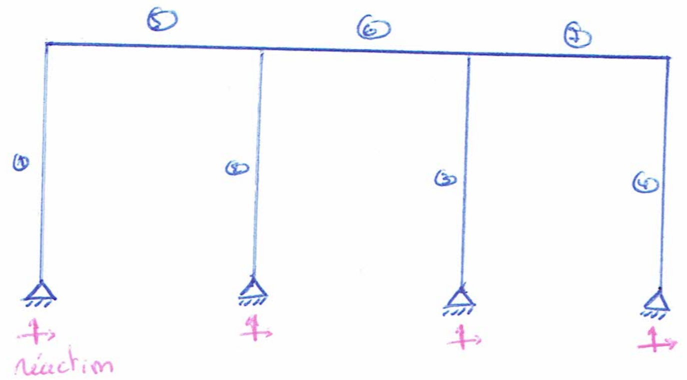
$$\boxed{d_{int} = d - d_{ext}}$$

avec d : degré d'hyperstaticité globale : $d = \sum li - 3b$

* Exemple :

nombre des barres :

$b = 7$



* Determiner le degré d'hyperstaticité du Systeme ?

$li_{ext} = \sum$ réaction d'appuis $= 8$

$li_{int} = 3(b-1) = 3(7-1) = 3 \times 6 = 18$

$d = \sum li - 3b \Rightarrow d = (18+8) - 3(7) = 26 - 21 = (5)$

la Structure est hyperstatique d'ordre (5)

* degré d'hyperstaticité exterieures :

$d_{ext} = \sum l_{ext} - 3 = 8 - 3 = \boxed{5}$

* degré d'hyperstaticité interieure :

$d_{int} = d - d_{ext} = 5 - 5 = \boxed{0}$

Donc la Structure est 5 fois hyperstatique exterieurement

4.4/ Structure Isostatique associée :

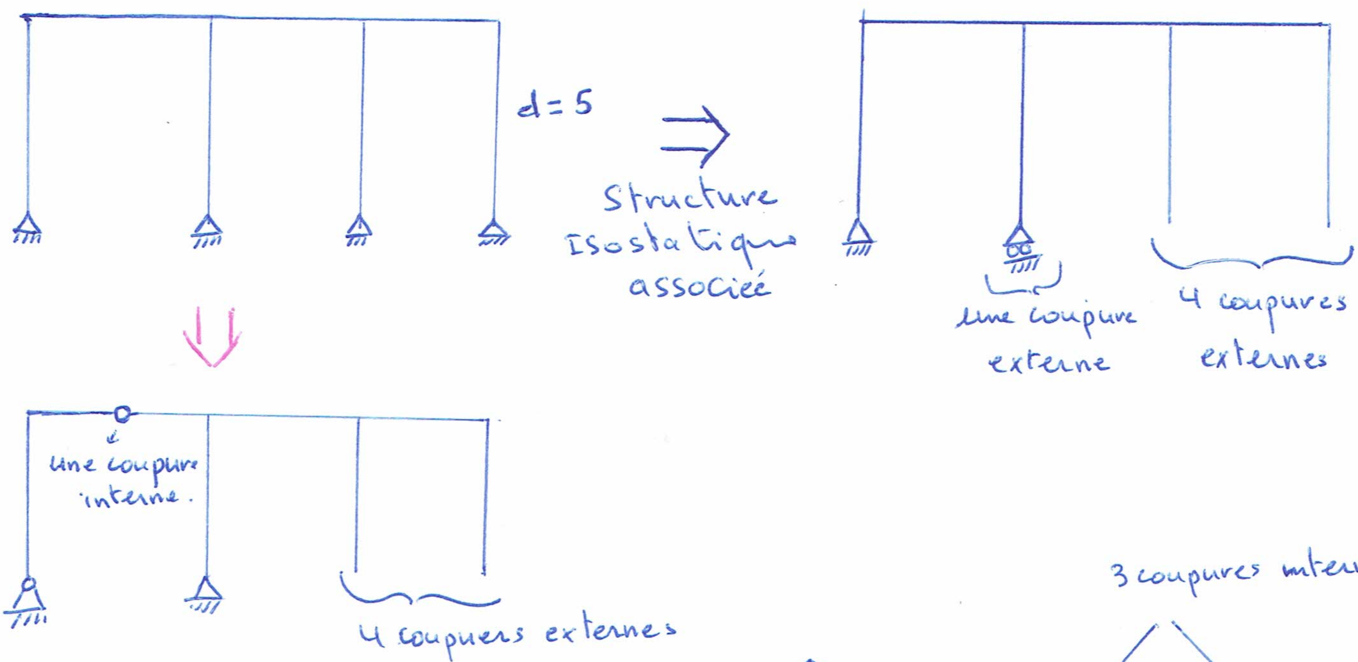
Soit (S) une structure n fois hyperstatique soumise à une chargement exterieur, on lui associe une structure Isostatique (SI) en affectant n coupures.

une coupure st obtene :

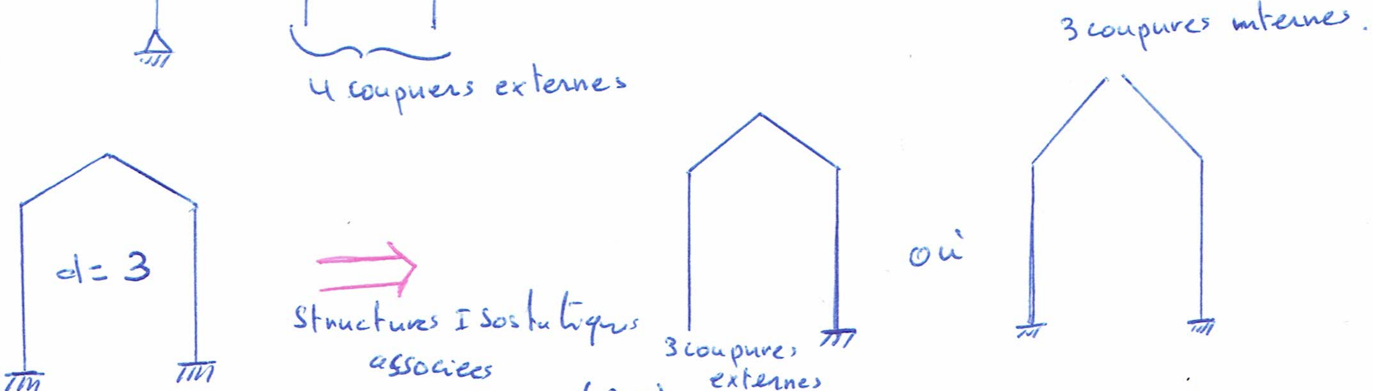
- Soit en libirant une liaison d'appuis, en peut supprimer un appui
- Soit en annulant une composante d'effort interieur dans une section donnée (exemple en peut introduit une rotule pour annuler (M)).

Exemple :

1/



2/



4.5/ La méthode des forces :

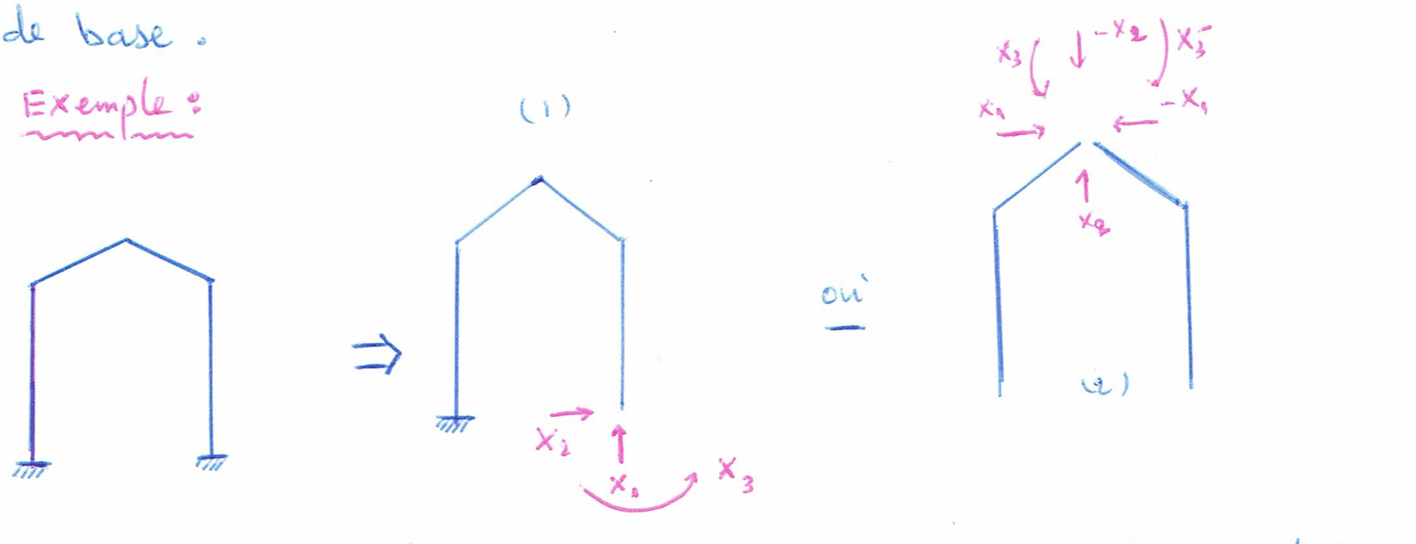
La méthode des forces s'applique aux structure hyperstatique lorsque les liaisons sont rigides et parfaite, elle basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charge réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

4.5.1/ Principe de la méthode des forces :

Le Principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalante c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.

- Pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base.

Exemple :



La structure initial et transformée en une structure isostatique équivalante soumise aux charges exterieures et aux réactions choisies (les inconnues X_1 et X_2 X_3).

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par un système de base (fondamental, Principal).

La structure isostatique équivalante et soumise à deux catégorie de forces :

- forces exterieures de départ (charges réparties, concentrées)
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

4.6/ Les méthodes energitiques :

* Théorème de ménabria :

- Théorème : La derivée Partielle de l'energie Potentielle interne (W) d'un Système Par rapport à une inconnue hyperstatique externe où Par rapport à la Valeur Commune de deux inconnues hyperstatique internes X_i, dégagé Par une Coupure, est égale au manque de concordance Correspondant C_i.

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = C_i$$

W : energie Potentielle, energie de déformation.

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i \int_L \frac{M^2}{EI}\, ds}_{\text{moment fléchissant}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i \int_L \frac{N^2}{EA}\, ds}_{\text{Effort normale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i \int_L k\,\frac{T^2}{GA}\, ds}_{\text{Effort tranchant}}$$

A : Surface (Section).

E : modul de young.

I : moment d'inertie.

$K = \frac{A}{I_z^2}\int_h \frac{S_z^2}{b}\, dy$; S_z : moment Statique par rapport l'axe z.

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: modul de Cisaillement.

K : facteur de Cisaillement.

* Si la flexion est prépondérante par rapport aux autres Sollicitations, l'expression de l'energie se reduit au premier terme : $W = \frac{1}{2}\sum_i \int_{L_i} \frac{M^2}{EI}\, ds$

Pour un Système Concordant d'ordre n, on aura un système de n'équatition.

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \; \ldots \; ; \; \frac{\partial W}{\partial x_j} = 0 \; \ldots \; ; \; \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0$$

On peut montrer que chacune de ces équations Peut se mettre Sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial x_j} = 0 \iff \boxed{\sum_{i=1}^{n} \underset{\text{inconnue}}{x_i} \, u_{ji} + u_{j0} = 0} \qquad j = 1, 2 \ldots, n$$

et le système des n équations de continuité, Peut se mettre Sous forme.

$$\boxed{[u_{ji}] \cdot \{X_i\} + [u_{j0}] = 0} \quad \ldots \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u_{11} X_1 + u_{12} X_2 + \ldots + u_{1n} X_n + u_{10} = 0 \\ u_{21} X_1 + u_{22} X_2 + \ldots + u_{2n} X_n + u_{20} = 0 \\ \vdots \\ u_{n1} X_1 + u_{n2} X_2 + \ldots + u_{nn} X_n + u_{n0} = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad (4.2)$$

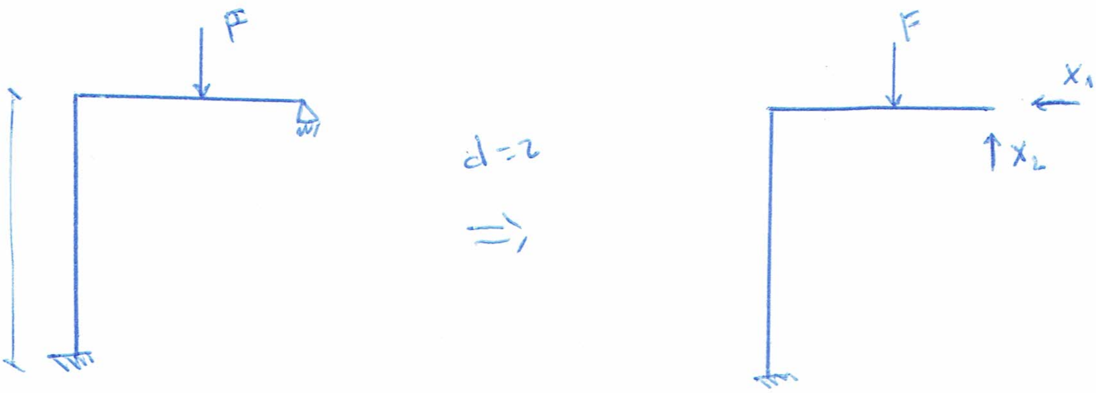
ou sous forme matricielle :

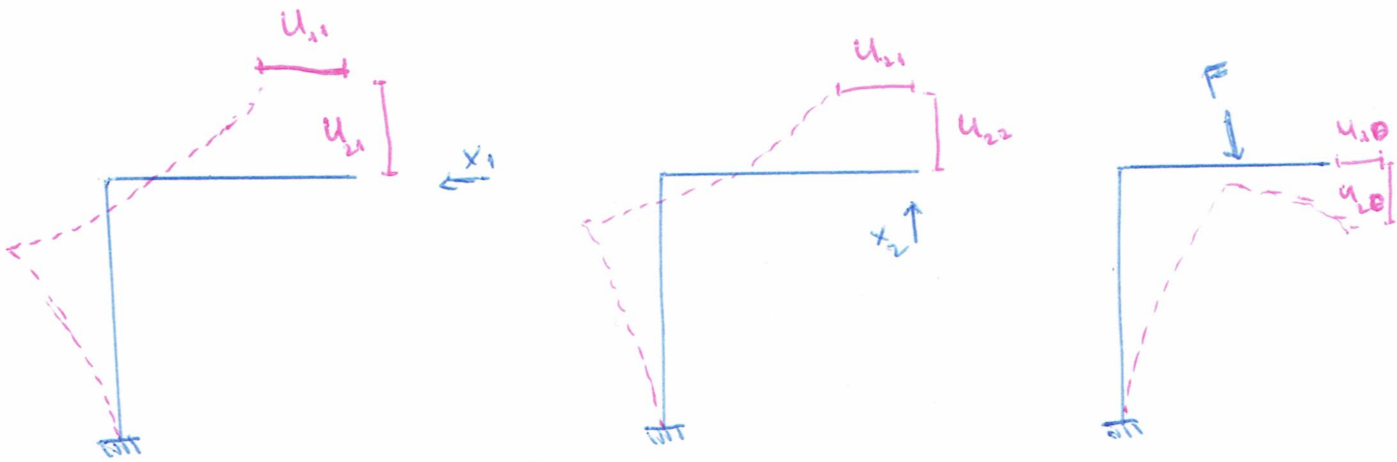
$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{n0} \end{Bmatrix}$$

Les équation (4.1) et (4.2) du système sont appelées équations canoniques de la méthode des forces.

- $[u_{ij}]$: matrice des coefficient de flexibilité
- u_{ij} : représente le coefficient de flexibilité, c'est le déplacement produit dans la section (i) selon la direction de la force (X_i), causée par une force $X_i = 1$
- u_{i0} : le déplacement produit dans la section (i) ~~par~~ du le système de base sous l'effet des charges appliquées (charges exterieures).

Exemple :





Pour la détermination des déplacements généralisés, nous devons utiliser des intégrales de Mohr ou Veretchaguine.

4.6.1/ Détermination des coefficients u_{ji} et u_{jF} :

en Pratique lorsqu'on analyse des Poutres essentiellement fléchies, on néglige habituellement les déformation dues à l'effort tranchant et à l'effort normale sauf pour certaines constructions particulières (arcs, ...).

$$u_{ji} = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell} m_j\, m_i\, ds$$

$$u_{j0} = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell} m_j \cdot m_0\, ds$$

m : moment fléchissant

4.7/ La Procédure de la méthode des forces :

Les differents étapes de calcul Par la méthode des forces sont les suivantes :

1. Détermination le degré d'hyperstaticité $d = n$
2. Ecrire les n équation canoniques.
3. Choisir le système de base (Système isostatique le plus simple).
4. Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges exterieures ($X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$).
5. Tracer les diagramme ou epures m_i $(i = 1, \dots, n)$ correspondant au système isostatique sans charges exterieurs et avec $X_i = 1$ et les autres inconnus nuls.
6. On calcul tous les coefficients u_{ji} et u_{j0} à l'aide des diagrammes.

7 - Résolution du système d'equation canoniques :

$$\begin{cases} U_{11} X_1 + U_{12} X_2 + \cdots + U_{1n} X_n + U_{1F} = 0 \\ U_{21} X_1 + U_{22} X_2 + \cdots + U_{2n} X_n + U_{2F} = 0 \\ \vdots \\ U_{n1} X_1 + U_{n2} X_2 + \cdots + U_{nn} X_n + U_{nF} = 0 \end{cases}$$

8 - Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i \cdot X_i \quad (i = 1, \dots, n)$

$m_1^* = m_1 X_1 \; ; \; m_2^* = m_2 X_2 \dots ; \; m_n^* = m_n \cdot X_n$

9 - On fait la somme des épures unitaires corrigées

$$\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$$

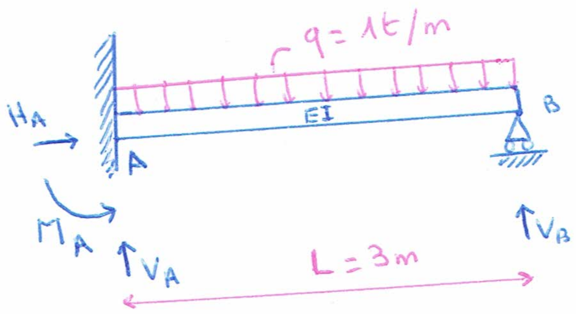
10 - En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissant final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants :

$$M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$$

4.8/ Exemple d'application :

On étude la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A ; repose sur un appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre, la rigidité EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissant



Solution :

1/ On détermine le degré d'hyperstaticité d :

$$\boxed{d = \sum l_i - 3b} \qquad b = 1$$

$l_{int} = 3(b-1) = 0$

$l_{ext} = 4 \qquad d = \sum l_i - 3b \Rightarrow d = (4+0) - 3 = 1$

- degré d'hyperstaticité exterieure :

$$d_{ext} = \sum l_{ext} - 3 \Rightarrow d_{ext} = 4 - 3 = 1$$

- degré d'hyperstaticité interieure :

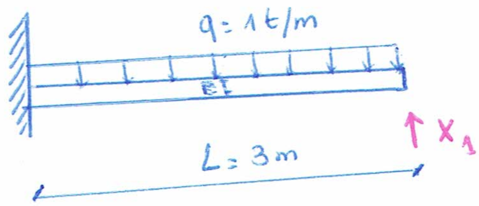
$$d_{int} = d_{ext} - d = 1 - 1 = 0$$

Donc le systèm et une fois exterieurement hyperstatique

2/ Le système d'equation canoniques :

$$u_{11} X_1 + u_{10} = 0$$

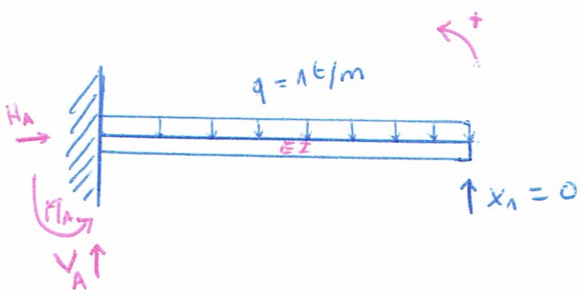
3/ choix du système de base (fondamental) :



4 et 5/ On trace l'epure (diagramme) des moment fléchissant du système isostatique :

Etat 0 : Le moment fléchissant M_0 :

Charges exterieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - q \cdot L = 0$

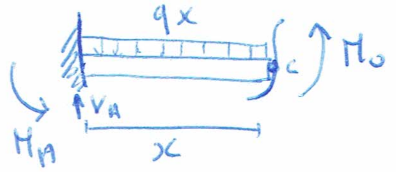
$\Rightarrow V_A = +qL$

$$\boxed{V_A = 3t}$$

$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow M_A - qL \times \frac{L}{2}$

$$\boxed{M_A = \frac{qL^2}{2} = \frac{1(3)^2}{2} = 4{,}5t}$$

* Calcul moment fléchissant M_0 :



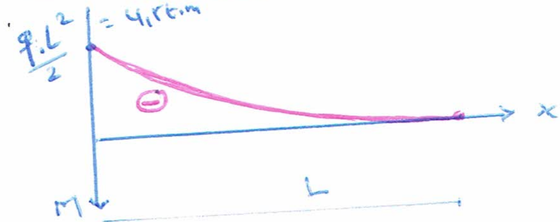
$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_0 + M_A - V_A \cdot x + qx \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M_0 + \frac{qL^2}{2} - qLx + \frac{qx^2}{2} = 0$$

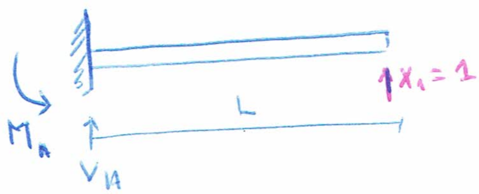
$$\Rightarrow \boxed{M_0 = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2}}$$

$$x = 0 \Rightarrow \boxed{M_0 = -\frac{qL^2}{2}}$$

$$x = L \Rightarrow \boxed{M_0 = 0}$$



Etat 1 :



\- Réactions d'appuis:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow + V_A + X_1 = 0$$

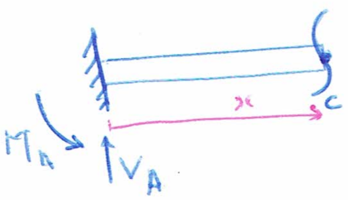
$$\Rightarrow \boxed{V_A = -X_1}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow$$

$$M_A + X_1 \cdot L = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = -X_1 \cdot L}$$

avec $X_1 = 1$

* Calcul du moment fléchissant:



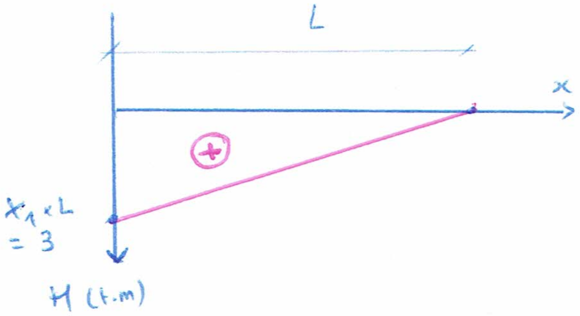
$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_1 + M_A - M_{V_A} = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = -X_1 \cdot x + X_1 \cdot L$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = X_1 (L - x)} = (L - x)$$

$$x = 0 \Rightarrow \boxed{M_1 = X_1 \cdot L} = L$$

$$x = L \Rightarrow \boxed{M_1 = 0}$$



6/ Cas calcul tous les coefficient u_{ji} et u_{j0} (deplacement):

$$\boxed{u_{11} X_1 + u_{10} = 0}$$

* $u_{11} = ?$

$$u_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_1 \cdot m_1 \, dx$$

$$m_1 = (L - x)$$

$$u_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left((L-x)\cdot(L-x)\right)dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(x^2 - 2Lx + L^2\right) dx$$

$$u_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}Lx^2 + L^2x\right]_0^L = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + (3)^2(3)\right]$$

$$\boxed{u_{11} = \frac{9}{EI}}$$

* $u_{10} = ?$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L m_1 \cdot m_0 \, dx$$

avec : $m_1 = (L-x)$ et $m_0 = -\frac{q}{2}x^2 + qLx - \frac{qL^2}{2}$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left((L-x)\cdot\left(-\frac{q}{2}x^2 + qLx - \frac{qL^2}{2}\right)\right) dx$$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{q\cancel{L}}{\cancel{2}}x^2 + qL^2x - \frac{qL^3}{2} + \frac{q}{2}x^3 - q\cancel{L}x^2 + \frac{qL^2}{2}x\right) dx$$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\left(\frac{-qL}{2} - qL\right)x^2 + \left(\frac{qL^2}{2} + qL^2\right)x + \frac{q}{2}x^3 - \frac{qL^3}{2}\right) dx$$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{3}{2}qLx^2 + \frac{3}{2}qL^2x + \frac{q}{2}x^3 - \frac{qL^3}{2}\right) dx$$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{3}{3\times 2}qLx^3 + \frac{3}{2\times 2}qL^2x^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{q}{2}x^4 - \frac{qL^3}{2}\cdot x\right]_0^L$$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qL^4}{2} + \frac{3}{4}qL^4 + \frac{qL^4}{8} - \frac{qL^4}{2}\right]$$

$$u_{10} = \frac{1}{EI}\left[\frac{-4+6+1-4}{8}\right]qL^4$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{10} = -\frac{qL^4}{8EI}}$$

Donc : $u_{11}X_1 + u_{10} = 0 \Rightarrow \frac{9}{EI}X_1 - \frac{qL^4}{8EI} = 0$

$$\Rightarrow \frac{9}{EI}X_1 = \frac{qL^4}{8EI} \Rightarrow X_1 = \frac{q\cdot L^4\cdot \cancel{EI}}{9\times 8\cdot \cancel{EI}}$$

$$\boxed{X_1 = 1{,}125\ t}$$

7/ Correction des épures unitaires m_i^* :

- Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$

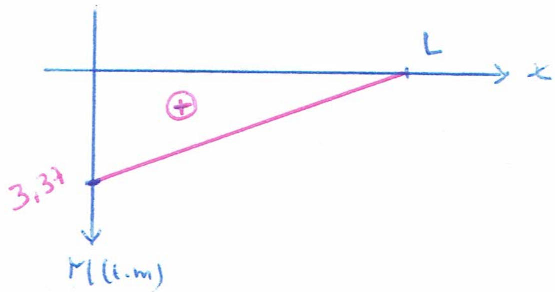
$$m_1^* = (L-x) \cdot X_1 = 1{,}125(L-x)$$

$x = 0$

$m_1^* = 3{,}375 \text{ t.m}$

$x = L$

$m_1^* = 0$



8/ Le diagramme des moments flechissant final : M_{final}

$$M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$$

$$M_{final} = M_0 + m_1^* = -\frac{q}{2}x^2 + qLx - \frac{qL^2}{2} + 1{,}125(L-x)$$

$$M_{final} = -\frac{q}{2}x^2 + (qL - 1{,}125)x - \frac{qL^2}{2} + 1{,}125L$$

$x = 0 \Rightarrow \boxed{M_f = -1{,}125 \text{ t.m}}$

$x = L \Rightarrow \boxed{M_f = 0}$

$$d(M_f) = d\left(-\frac{1}{2}x^2 + (qL - 1{,}125)x - \frac{qL^2}{2} + 1{,}125L\right)$$

$$d(M_f) = -\frac{2}{2}qx + (qL - 1{,}125) = T$$

$$d(M_f) = 0 \Rightarrow qx + (qL - 1{,}125) = 0 \Rightarrow qx = qL - 1{,}125$$

$$\Rightarrow x = \frac{qL - 1{,}125}{q} = 1{,}875$$

$x = 1{,}875 \text{ m}$ $\Rightarrow M_f = -\frac{1}{2}(1{,}875)^2 + (1{,}875)\cdot(1{,}875) - \frac{(3)^2}{2} + 3{,}375$

$$M_f = 0{,}632 \text{ t.m}$$

Le diagramme :