chapitre N°01

Système en treillis Isostatiques.

l'objectif de ce chapitre est de vous initier au calcul analytique de la réponse statique d'un treillis bidimensionnel.

Ces calculs permettent d'obtenir très rapidement l'effort normal dans les éléments d'une structure simple.

L'effort normal permet de verifier que la structure reste dans le domain élastique. Dans ce chapitre nous ne traitons que des problèmes statiques.

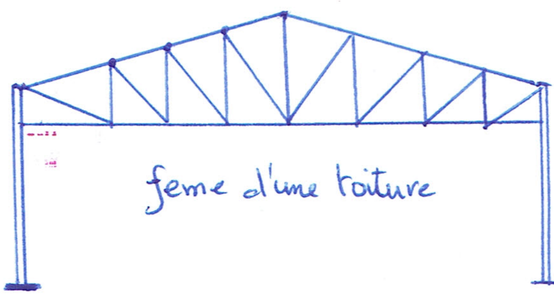
Chapitre 01 : Système en treillis Isostatique.

1.1/ Definition :

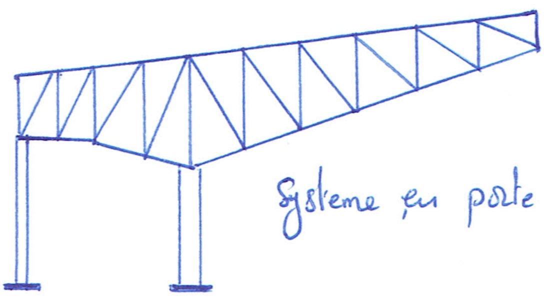
un treillis st une Structure Constituée d'un assemblage de barres articulée entre elles, les articulations Sont les noeuds de la Structure. Les barres Sont assemblees de façon à former des triangles. Le triangle a été pris comme base de ces Constructions parce qu'il st la Seul forme géométrique indéformable.

Les charges exterieurs Sont Supposées appliquées aux noeuds de la Structure. Les éléments du treillis ne travaillent donc qu'en traction et en compréssion.

1.2/ Différent types de treillis :



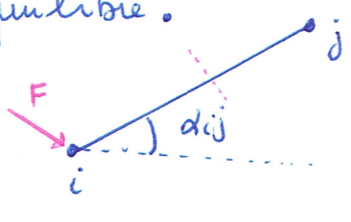
ferme d'une toiture

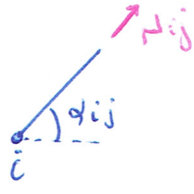


Systeme en porte à faux

1.3/ Les forces internes :

Le treillis est une Structure en équilibre, donc chacune de ses parties et composantes (barres, noeuds et Sections) est en équilibre.





l'equation d'équilibre de noeud i

$$\begin{cases} F_{xi} + \sum N_{ij} \cos \alpha_{ij} = 0 \\ F_{yi} + \sum N_{ij} \sin \alpha_{ij} = 0 \end{cases}$$

1.4/ Détermination du degré d'hyperstaticité :

Soit un treillis plan contenant n noeuds et b barres, pour chaque noeud on peut écrire deux équations d'équilibres, on a donc $2n$ équation d'equilibre. pour chaque barre, on a une inconnue (l'effort axial dans la barre). Donc, pour b barres, on a b inconnues.

Soit e le nombre de composante de réaction d'appuis inconnues (nombre de liaison exterieur).

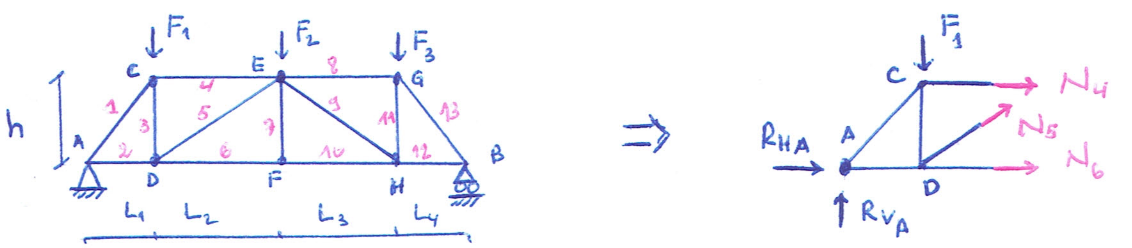
Pour que le treillis soit isostatique, on conclut que la relation suivante doit être respectée : $\boxed{2n = b + e}$

- Si $2n < b+e$, le treillis est hyperstatique et on définit le degré d'hyperstaticité K comme $\boxed{K = (b+e) - 2n}$
- Si $2n > b+e$, le nombre d'équation est superieur au nombre d'inconnes, le treillis et alors instable et il s'agit d'un mécanisme.

1.5/ Analyse des treillis plans isostatiques :

1.5.1/ Analyse de treillis par la methode des sections :

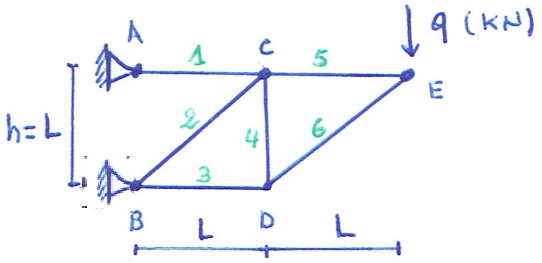
Elle consiste à couper le système en deux parties, et considérer les équations d'equilibre de la statique de l'une des deux parties, la section devrait être choisie pour qu'il y ait au maximum trois efforts inconnus. "La coupe idéale et celle qui ne sectionne que trois barres".



<u>N.B</u> : Si $N_i > 0 \Rightarrow$ l'effort et un effort de Traction

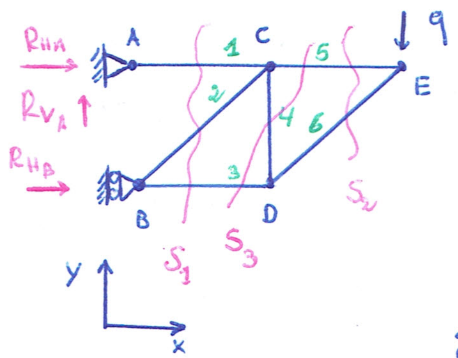
et Si $N_i < 0 \Rightarrow$ l'effort et un effort de compression.

Application :



Calculer les efforts internes dans les barres par la méthode des sections.

Solution :



⊕ M

1/ Détermination des réactions d'appuis :

en equilibre :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow R_{HA} + R_{HB} = 0$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow R_{VA} - q = 0 \Rightarrow \boxed{R_{VA} = q}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_{HB} \cdot \overset{=L}{h} - q \cdot 2L = 0$$

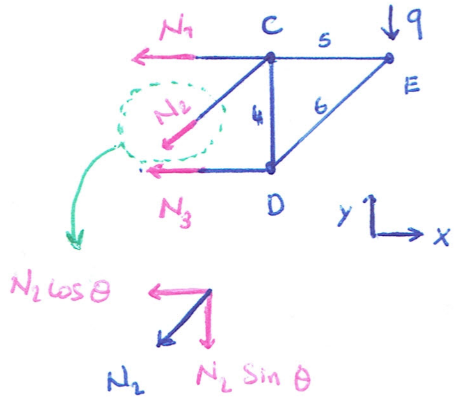
$$\Rightarrow R_{HB} \cdot L = 2qL \Rightarrow \boxed{R_{HB} = 2q}$$

et $\boxed{R_{HA} = -2q}$

2/ Calcul des efforts internes :

Section 1 :

⊕ M



En équilibre :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow -N_1 - N_2 \cos\theta - N_3 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow -N_2 \sin\theta - q = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow -N_3 \cdot \overset{=L}{h} - q \cdot L = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

On a $h = L \Rightarrow \theta = 45°$

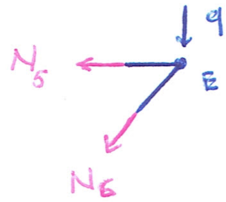
Donc $\cos\theta = \cos 45 = \sqrt{2}/2$ et $\sin\theta = \sqrt{2}/2$

(2) $\Rightarrow -N_2 \cdot \sqrt{2}/2 = q \Rightarrow \boxed{N_2 = -\frac{2q}{\sqrt{2}}}$ compression.

(3) $\Rightarrow -N_3 \cdot L - q \cdot L = 0 \Rightarrow \boxed{N_3 = -q}$ compression

(1) $\Rightarrow -N_1 + \frac{2q}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{\cancel{\sqrt{2}}/2} + q = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = 2q}$ traction

Section 02 :



En equilibre :

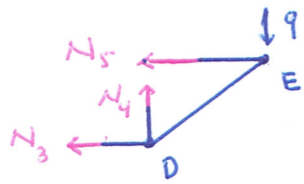
$\Sigma F_{/x} = 0 \Rightarrow -N_5 - N_6 \cos\theta = 0 \quad \dots (1)$

$\Sigma F_{/y} = 0 \Rightarrow -N_6 \sin\theta - q = 0 \quad \dots (2)$

$(2) \Rightarrow -N_6 \sqrt{2}/2 - q = 0 \Rightarrow \boxed{N_6 = -\frac{2q}{\sqrt{2}}}$ compression

$(1) \Rightarrow -N_5 + \frac{\cancel{2}q}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{N_5 = q}$ traction.

Section 03 :



$N_5 = q$ et $N_6 = -\frac{2q}{\sqrt{2}}$

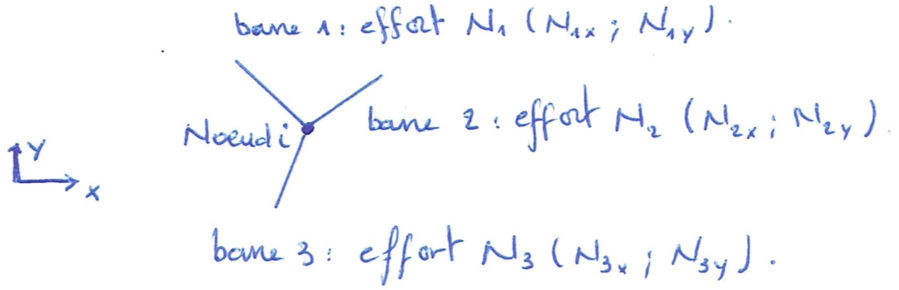
$\Sigma F_{/y} = 0 \Rightarrow N_4 - q = 0 \Rightarrow \boxed{N_4 = q}$ traction

1.5.2 Analyse de treillis par la méthode des noeuds :

Dans un treillis, les forces extérieurs et les réactions sont appliquées aux noeuds qui sont articulés. Par conséquent, chaque noeud doit être en équilibre sous l'action des forces concourantes qui sont les forces exterieures, incluant les réactions s'il y a lieu, ainsi que les efforts normaux dans les barres qui aboutissent à ce noeud.

Pour évaluer les efforts dans les barres, on isole un noeud après on remplace chaque barre concourant au noeud par l'effort correspondant, on détermine ainsi les efforts inconnus qui ne devraient pas être plus de deux par noeud.

Soit un noeud d'indice i reliant plusieurs barres :



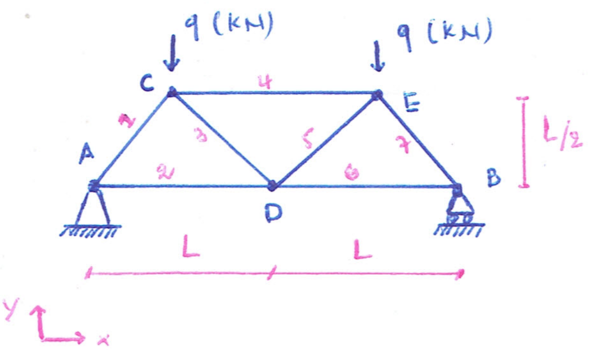
Pour que le noeud soit à l'équilibre, il faut que :

- La somme des composantes horizontales N_{ix} des effort N_i escercés sur ce noeud soit nulle.
- La somme des composantes verticales N_{iy} des effort N_i escercés sur ce noeud soit nulle.

<u>N.B</u> Si $N_i > 0$ ⇒ l'effort st un effort de traction

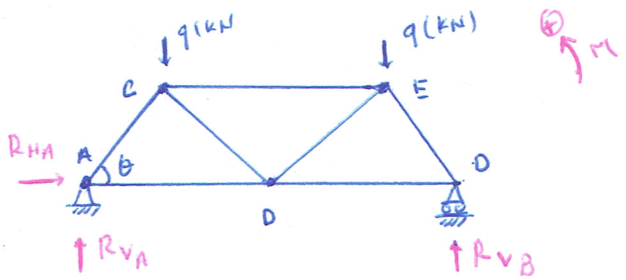
et si $N_i < 0$ ⇒ l'effort st un effort de compression

Application :



Calculer les efforts internes dans les barres.

1/ Calcul des réaction d'appuis :



d'après la forme l'angle $\theta = 45°$

en équilibre :

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{R_{HA} = 0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{VA} + R_{VB} \quad 2q = 0$

$\Rightarrow R_{VA} + R_{VB} = 2q$ .... (1)

$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow -q \cdot \frac{L}{2} - q \cdot \left(L + \frac{L}{2}\right) + R_{VB} \cdot 2L = 0$

$\Rightarrow + \frac{qL}{2} + \frac{3qL}{2} = R_{VB} \cdot 2L$

$\Rightarrow \boxed{R_{VB} = q}$ (kN).

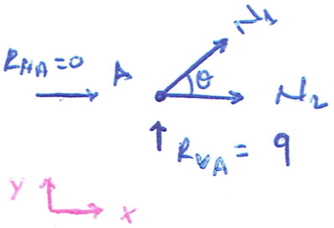
$$(1) \Rightarrow R_{VA} + q = 2q$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{VA} = q} \quad (KN)$$

2/ Calcul des efforts internes par la méthode des noeuds :

- Equilibre des noeud :

Noeud A : Remplaçons l'articulation par R_{HA} et R_{VA}, les barres par des efforts N_1 et N_2 en tension.



$$\Sigma F_x = 0 : N_2 + N_1 \cos\theta = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

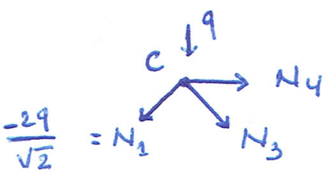
$$\Sigma F_y = 0 : R_{VA} + N_1 \sin\theta = 0 .$$

$$N_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -q \Rightarrow \boxed{N_1 = -\frac{2q}{\sqrt{2}}} \quad \text{Compression}$$

$$(1) \Rightarrow N_2 = -N_1 \cos\theta .$$

$$\Rightarrow N_2 = +\frac{2q}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{N_2 = q} \quad \text{traction.}$$

Noeud C : Remplaçons la barre 1 par son effort, la barre 3 par l'effort N_3 supposé en tension et la barre par un effort N_4 supposé en tension.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_4 - N_1 \cos\theta + N_3 \cos\theta = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_1 \sin\theta - N_3 \sin\theta - q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\cancel{q}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} - N_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{q} = 0$$

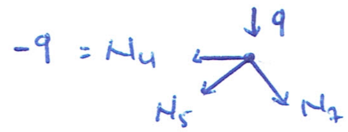
$$\Rightarrow \boxed{N_3 = 0}$$

$$(1) \Rightarrow N_4 = \left(\frac{-2q}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} - 0$$

$$\boxed{N_4 = -q} \quad \text{Compression.}$$

Noeud E :

Remplaçons la barre 4 par son effort, la barre 5 par l'effort N_5 supposé en tension, et la barre 7 par l'effort N_7 supposé en tension.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N_4 + N_7 \cdot \cos\theta - N_5 \cos\theta = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -9 - N_7 \cdot \sin\theta - N_5 \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow -N_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow -N_7 = \frac{29}{\sqrt{2}} + N_5 \quad \ldots\ldots (2)$$

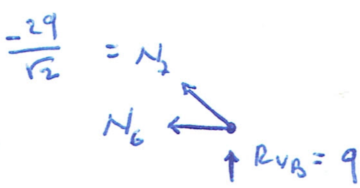
(1) dans (2) $\Rightarrow +9 + \left(\frac{-29}{\sqrt{2}} - N_5\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$+9 + \left(-9 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot N_5\right) - N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = 0 \Rightarrow \boxed{N_5 = 0}$$

(2) $\Rightarrow \boxed{N_7 = -\frac{29}{\sqrt{2}}}$ compression.

Noeud B :

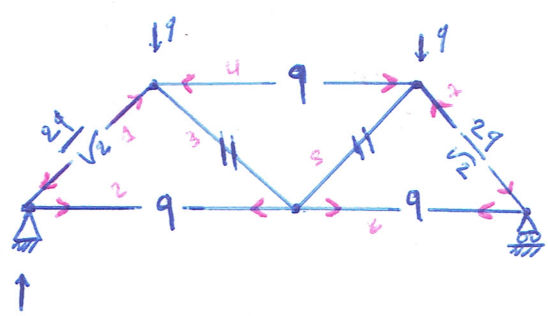


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N_6 - N_7 \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow N_6 = -N_7 \cos\theta$$

$$N_6 = -\left(\frac{-29}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{N_6 = 9} \text{ traction}$$



barre	Effort	observation
1	$-\frac{29}{\sqrt{2}}$	compression
2	9	traction
3	0	/
4	-9	compression
5	0	/
6	9	traction
7	$-\frac{29}{\sqrt{2}}$	compression