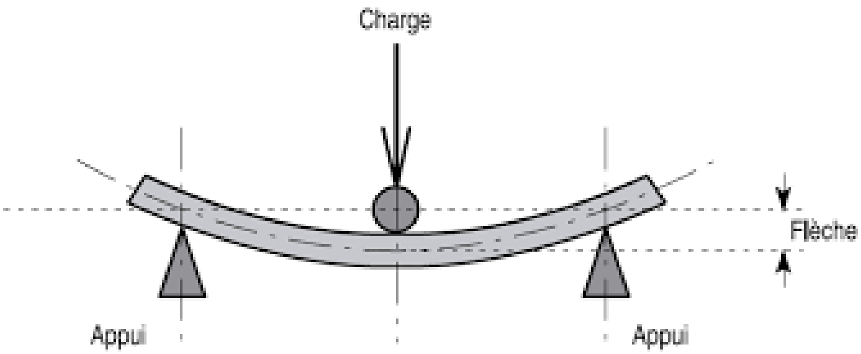
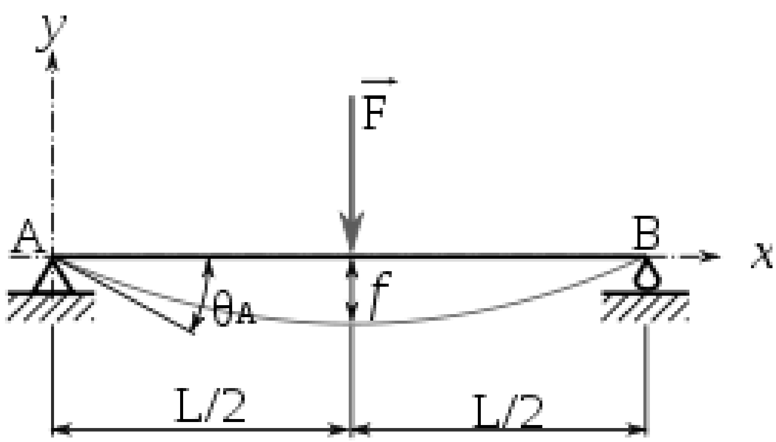
Chapitre 2

Déplacement des poutres symétriques en flexion plane





II.1. Introduction

L'ingénieur s'intéresse non seulement aux contraintes provoquées par les charges sur une poutre mais aussi les déformations. Souvent il est spécifié que la flèche maximale ne doit pas dépasser une faible fraction de la portée (distance entre appuis) sous l'action d'une charge, une poutre fléchie. Ses sections se déplacent perpendiculairement à l'axe initialement droit tout en trouvant simultanément.

II.2. Expression de l'équation de déformation

II.2.1. Calcul rayon de courbure R

D'après l'essai de flexion sur les poutres, on constate que les lignes longitudinales prennent la forme d'un arc de cercle et que les sections transversales restent planes est perpendiculaires aux lignes longitudinales. Par conséquent, la fibre neutre a une courbure dont le rayon est appelé **R**. De plus, cette courbe est appelée déformée ou ligne élastique de la poutre et peut être décrite par une équation de la forme y= f (x). Les ordonnées Y représentant les flèches subies par les sections de la pièce.
Considérons une couche EF à une distance y en dessous de la couche neutre NN. Après l'essai de flexion, cette couche sera allongée à E'F '
Longueur d'origine de la couche neutre EF=dx.
Aussi la longueur de la couche neutre NN=dx.
Après flexion, la longueur de la couche neutre N'N' restera inchangé. Par contre la longueur de la couche E'F' augmentera. On a N'N'=NN=dx.

R : rayon de la courbe de l'axe neutre

θ : angle entre les sections A'B 'et C'D'

$N'N' = R.\theta$

$E'F' = (R+y).\,\theta$

$EF = N'N' = NN = dx$

$dx = R.\,\theta$

augmentation de la longueur *EF :*

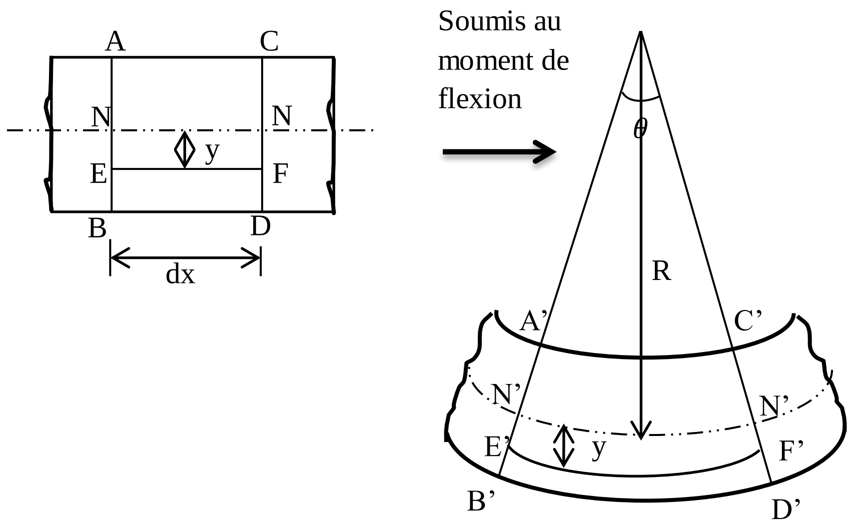
$E'F' - EF = (R+y).\,\theta - R.\theta = y.\,\theta$

$$\varepsilon = \frac{E'F' - EF}{EF} = \frac{(R+y).d\theta - R.d\theta}{R.d\theta} = \frac{y}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{E}{R}y \rightarrow \frac{M.y}{I_{gn}} = \frac{E}{R}y$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{Mf}}{\boldsymbol{EI_{gn}}} \dots\dots (\mathbf{1})$$



Equation de déformation qui permet de calculer le rayon de courbure de la poutre déformée dans une section où la valeur du moment fléchissant est Mf.
Mf : moment fléchissant (mm.N).
E : module de Young (N/mm^2)
I: moment d'inertie (mm^2)
R: rayon de courbure mm.

II.2.2. Calcul la flèche (le déplacement vertical):

Considérons une poutre droite sollicitée en flexion simple par la force F en équilibre, soit AB la fibre neutre avant déformation. Après déformation, cette fibre neutre prend la forme d'une courbe AMB. Pour repérer les déplacements des différents points de cette fibre (au cours de la déformation le point C est venu en C'), choisissons le système d'axes xAy, orientés comme l'indique la figure ci-dessous. Le déplacement du point C, la flèche de la poutre en C d'abscisse x est mesurée par l'ordonnée y=C'C. La ligne AMB porte le nom déformée de la poutre ou de linge élastique (voir paragraphe précédent). Pour connaitre la flèche en chaque point d'abscisse x, il faut connaitre l'équation y=f(x) de la déformée. (Remarque : ne pas confondre y : flèche en un point avec y : distance d'une fibre à la couche neutre).
On démontre en géométrie analytique que le rayon de courbure en un point d'abscisse x d'une courbe d'équation y=f(x) est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

y' étant la valeur que prend la dérivée première de y pour la valeur particulière de x ($\frac{dy}{dx}$) ;y'' étant la valeur que prend la dérivée seconde de y pour la valeur particulière de x ($\frac{d^2y}{dx}$) .
on sait d'autre part que la valeur de y' en un point est égale à la tg de l'angle θ formé par la tangente C'T à la courbe de l'axe des x. les déformations étant toujours très faibles, l'angle θ est très petit et $tg\theta = y'$ est très petit. On peut négliger le terme y'^2 devant 1. L'expression du rayon de courbure est alors $\frac{1}{R} = y''$

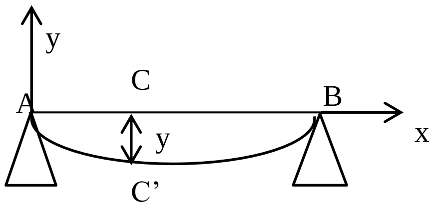
Dans l'équation (1) on obtient :

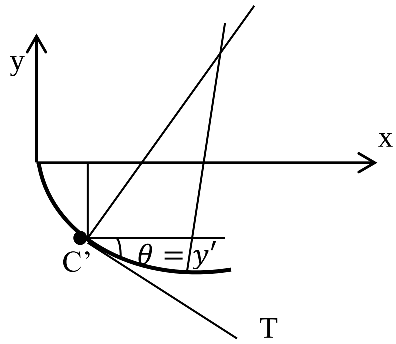
$$y'' = \pm \frac{Mf}{EI_{gn}}$$

Convention de signe

Dans la suite du cours on adopte

$$y'' = +\frac{Mf}{EI_{gn}} \dots (2)$$





II.3. Différentes méthodes de calcul de l'angle de rotation θ et de la flèche y

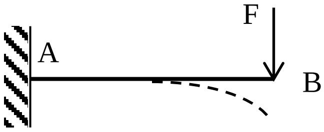
Pour calculer les angles de rotation et les flèches *y*, il faut intégrer l'équation (2), ce qui peut se faire de plusieurs méthodes, par exemple :

- Par la méthode de l'intégration directe
- Par la méthode des équations universelles (des paramètres initiaux).
- Par la méthode des moments des aires
- Par la méthode de superposition

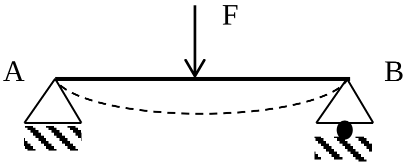
II.3.1. Méthode de l'intégration directe

La 1ere intégration $EIy' = \int Mdx + C$…….(C) : constant de l'intégration angle de rotation
La 2ere intégration $EIy = \int dx \int Mdx + C\,x + D$ ……..
(D) : constant de l'intégration, elle donne y : la flèche
Les constants C et D sont déterminés à partir des conditions d'appuis de la poutre. On les appelle aussi les conditions aux limites.

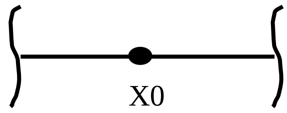
- **Conditions aux limites**



$\theta_A = 0$
$y_A = 0$
$MB = 0$



$y_A = 0$
$y_B = 0$
$MA \text{ ou } MB = 0$



$M^g(X_0) = M^d(X_0)$
$y^g(X_0) = y^d(X_0)$
$y'^g(X_0) = y'^d(X_0)$

- **Exemple d'application**

On demande de déterminer $\boldsymbol{y_{max}}$ ***et*** $\boldsymbol{\theta_{max}}$ pour la console suivante

$M_x = -Fx$

Donc : $EIy'' = -Fx$

1^{ere} intégration $\rightarrow EIy' = -F\frac{x^2}{2} + c$

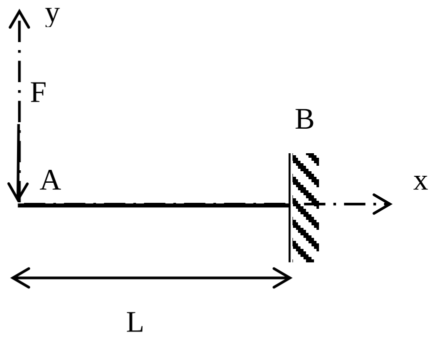
2^{ere} intégration $\rightarrow EIy = -F\frac{x^3}{6} + cx + d$

Conditions aux limites :

1)- x=L $\rightarrow \theta = y' = 0 \rightarrow c = F\frac{l^2}{2}$

2)- x=L$\rightarrow y = 0 \rightarrow EIy = -F\frac{x^3}{6} + Cx + D = 0 \rightarrow D = -F\frac{l^3}{3}$

$\boldsymbol{\theta_{max}} = \boldsymbol{\theta_A}$
$\boldsymbol{y_{max}} = \boldsymbol{y_A}$



II.3.2. Equations universelles de la déformée d'une poutre fléchies (des paramètres initiaux)

Si la rigidité de la poutre est constante EI=constant : les formules suivantes :

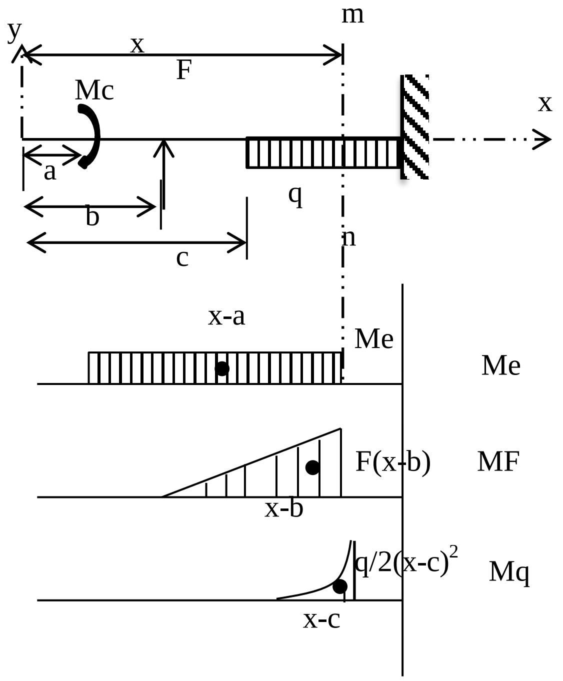
$$EIy' = EI\theta = EI\theta_0 + A' \; et \; EIy = EI\theta_0 X + S' + EIy_0$$

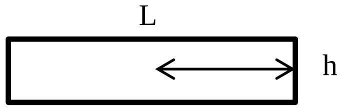
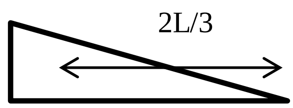
$A' = A'(x)$ est l'air du diagramme entre l'origine des coordonnées et la section courant où l'on détermine les déplacement $A'(0)$ est l'aire rejeté pour la section passant par l'origine des coordonnées, elle est nulle : $A'(0) = 0$.

$S(x) = S' = A'.xc$ moment statique de l'air rejetée par rapport à la section courante m,n.

S(0) est le moment statique de l'aire rejetée par rapport à la section qui passe par l'origine $S(0) = 0$ car $A'(0) = 0$

Peuvent se mettre sous une forme analytique. Faisons le pour 3 types de forces extérieures représentées sur la figure suivante et construisons les diagrammes des moments fléchissant pour chaque sollicitation. On cherche à calculer les déformations au point x de l'origine.



Forme du diagramme	Aire du diagramme	Distance jusqu'au centre de gravité
	h.L	L/2
	(½).h.L	2 L /3
	(1/3).h.L	3L/4

$$EIy' = EI\theta = EI\theta_0 + A'$$
$$= EI\theta_0 + Me(x-a) + \frac{1}{2}F(x-b)(x-b) + (1/3)q\frac{(x-c)^2}{2}(x-c)$$
$$EI\theta = EI\theta_0 + Me(x-a) + \frac{1}{2}F(x-b)^2 + \frac{1}{6}q(x-c)^3$$
$$EI\theta = EI\theta_0 + Me(x-a) + \frac{1}{2!}F(x-b)^2 + \frac{1}{3!}q(x-c)^3$$
$$EIy = EI\theta_0 x + EIy_0 + S'_{mn}$$
$$EIy = EI\theta_0 x + EIy_0 + Me(x-a).\frac{(x-a)}{2} + \frac{1}{2}F(x-b)^2\frac{(x-b)}{3} + \frac{1}{6}q(x-c)^3\frac{(x-c)}{4}$$
$$EIy = EI\theta_0 x + EIy_0 + \frac{1}{2}Me(x-a)^2 + \frac{1}{6}F(x-b)^3 + \frac{1}{24}q(x-c)^4$$
$$EIy = EI\theta_0 x + EIy_0 + \frac{1}{2!}Me(x-a)^2 + \frac{1}{3!}F(x-b)^3 + \frac{1}{4!}q(x-c)^4$$

Dans le cas de l'action simultanée de plusieurs forces extérieures, les équations des angles de rotation et des flèches (d'après le principe de la superposition des efforts) s'écrivent

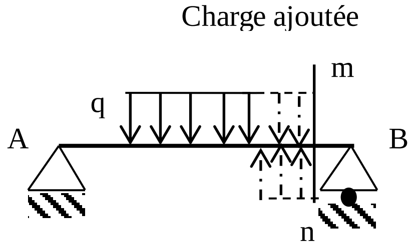
$$\left[\boldsymbol{EI\theta = EI\theta_0 + \sum Me_i(x-a_i) + \sum \frac{1}{2!}F_i(x-b_i)^2 + \sum \frac{1}{3!}q_i(x-c_i)^3}\right]$$
$$\left[\boldsymbol{EIy = EI\theta_0 x + EIy_0 + \sum \frac{1}{2!}Me_i(x-a_i)^2 + \sum \frac{1}{3!}F_i(x-b_i)^3 + \sum \frac{1}{4!}q_i(x-c_i)^4}\right]$$

Ces équations s'appellent équation universelles de l'axe fléchie d'une poutre ou équation des paramètres initiaux.

Remarque :

- Dans ces formules figurent avec leurs signes, toutes les forces extérieures (y compris les réactions d'appui) appliquées l'origine des coordonnées et la section d'abscisse x pour laquelle on détermine les déplacements

- Les forces extérieures représentées sur la figure précédente figurent dans les équations universelles avec le signe (+) et les forces extérieures orientées dans le sens opposé avec le signe (-)
- Il est important de noter que le dernier terme de ces équation n'est justifié que dans le cas où la charge répartie n'est pas coupée avant la section où l'on détermine y ou θ. Mais si la charge est coupée (termine avant m,n), il convient de la prolongé jusqu'à la section donnée tout en ajoutant une charge égale en valeur absolue mais de signe opposé.

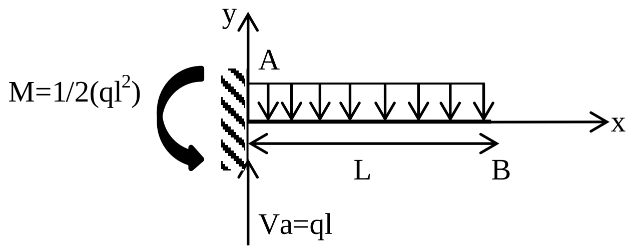


- **Exemple d'application**

Déterminer d'après les équations universelles, la flèche et l'angle de rotation maximaux de la console sollicitée par une charge uniformément répartie. Le repère est mis en A pour trouver facilement y_0 et θ_0.

$\boldsymbol{\theta_{max} = \theta_B}$

$\boldsymbol{y_{max} = y_B}$



Repère xoy =xAy $\begin{Bmatrix} \theta_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{Bmatrix}$

$Me = MA = +q\dfrac{l^2}{2}\ ; a = 0$

$F = VA = ql\ ; b = 0$

$q = -q\ ; c = 0$

$EI\theta = 0 - q\dfrac{l^2}{2}x + ql\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{6}q(x-0)^3$

$x = l \rightarrow \theta_{max} = -\frac{ql^3}{6EI}$ sens horaire

$EIy = 0 + 0 - q\dfrac{l^2}{2}\dfrac{(x-0)^2}{2} + q.l\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-0)^3}{3} - q\dfrac{(x-0)^4}{24}$

$EIy = -q\dfrac{l^2}{4}x^2 + q.l\dfrac{1}{6}x^3 - q\dfrac{x^4}{24}$

$$x = l \rightarrow y_{max} = -\frac{ql^4}{EI8}$$

II.3.3. Méthode moment des aires

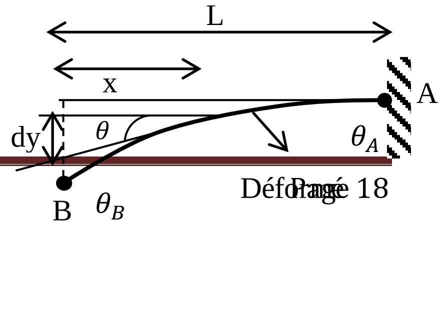
II.3.3.1. Calcul de la variation de l'angle $\boldsymbol{\theta}$

Une poutre AB porte un certain type de charge, et donc soumise à un moment de flexion comme indiqué dans la figure ci-dessus.

Soit A un point de pente nulle et de déviation nulle. Considérons un élément de petite longueur dx à une distance x de B. on a :

$y'' = \frac{Mf}{EI} \rightarrow \frac{dy\prime}{dx} = \frac{Mf}{EI}$

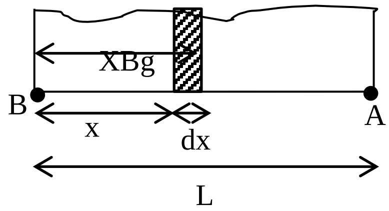
$\frac{dy\prime}{dx} = d\theta = \frac{Mf}{EI}dx$



$$\int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{Mf}{EI} dx$$

$$\theta_B - \theta_A = \frac{1}{EI} aire[Mf]_{x_A}^{x_B}$$

Diagramme du moment fléchissant



Le changement de l'angle entre deux points sur la courbe élastique (la déformée) d'une poutre fléchie est égal à l'air du diagramme du moment fléchissant entre ces points sur la rigidité EI.

II.3.3.2. Calcul de la flèche

$$d\theta \cong tg\theta = \frac{dy}{x}$$

$$dy = (x)d\theta$$

$$\int dy = \frac{1}{EI}\int_{x_A}^{x_B} (x)\, M\, dx$$

$$y_{BA} = x_{BG}\, aire \left[\frac{Mf}{EI}\right]_{x_A}^{x_B}$$

x_{BG} Distance entre point B et le centre de gravité de la section $[M]_{x_A}^{x_B}$

Exemple d'application 1

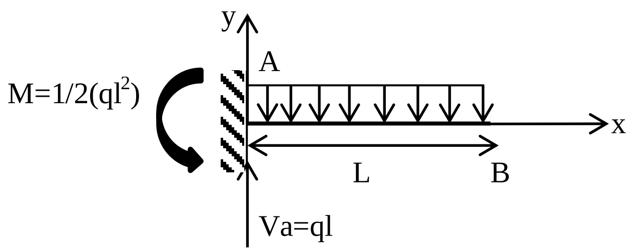
$$\theta_B - \theta_A = \frac{1}{EI} aire[Mf]_{x_A}^{x_B}$$

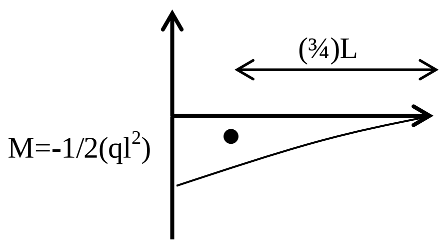
$$\theta_A = 0$$

$$\theta_B = \left[1/3\left(-\frac{qL^2}{2}\right)L\right]\frac{1}{EI} = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$y_{BA} = \frac{1}{EI} x_{BG}\, aire\, [Mf]_{x_B}^{x_A}$$

$$y_{BA} = \frac{1}{EI}\left[\frac{3}{4}L\left(\frac{-qL^3}{6}\right)\right] = -\frac{qL^4}{8EI}$$





II.3.4. Méthode des superpositions

Les sollicitations vues dans les cours précédent sont rarement présentées seules. Les équations dans la résistance des matériaux sont linéaires. Les déformations dues à plusieurs cas de charges peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations.

Exemple d'application

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous**.**

$yb = yq + yp$

$yq = -\frac{ql^4}{EI8}$

$yp = -\frac{PL^3}{3EI}$

$yc = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{ql^4}{EI8}$