

Chapitre 1 :

Flexion plane des poutres symétriques

I.1. Introduction générale

La résistance des matériaux découle de la mécanique du milieu continu. La mécanique des milieux continue (MMC) et en particulier la mécanique des solides, a pour objectif la détermination, en tout point d'un solide, du déplacement, des déformations et des contraintes en fonction des sollicitations extérieures exercées. Dans l'organigramme suivant on va démontrer la résistance des matériaux où se trouve

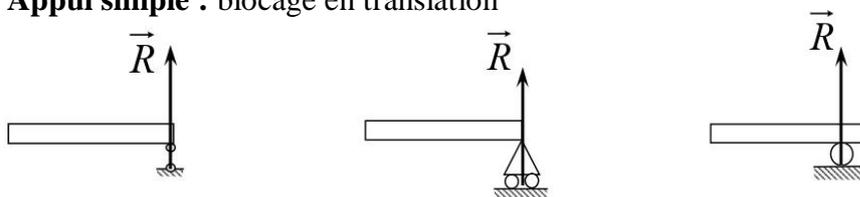
I.2. Définition de la résistance des matériaux (RDM)

Lorsqu'une force externe agit sur un corps, celui-ci a tendance à se déformer. En raison de la cohésion entre les molécules, le corps résiste à la déformation. Cette résistance par laquelle le matériau du corps s'oppose à la déformation est appelée résistance du matériau. La définition de la résistance des matériaux (RDM) en génie civil c'est le domaine du calcul ou un dimensionnement des poutres dans le domaine élasticité linéaire. L'objectif est de concevoir la structure (poutre) suivant des critères de résistance, de déformation admissible et de coût financier acceptable

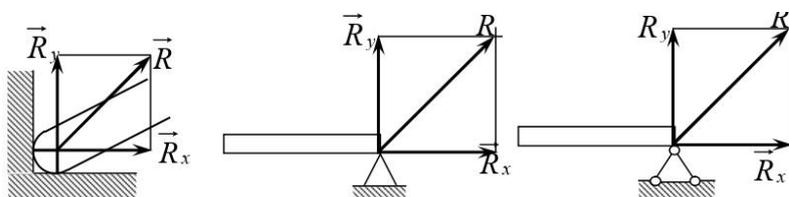
I.3. Rapelles

I.3.1 Les principales liaisons

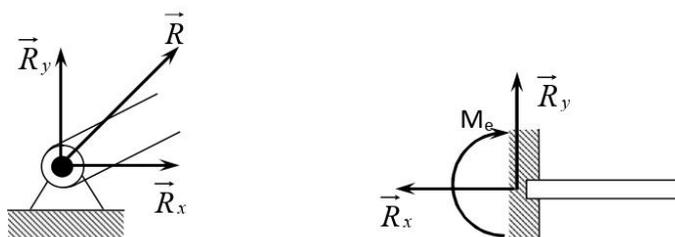
a) **Appui simple** : blocage en translation



b) **Appui double** : rotation libre + 2 blocages en translation

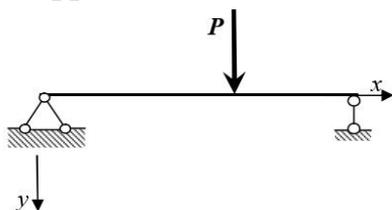


c) **L'articulation L'encastrement** : 3 blocages 2 en translation + 1 rotation libre

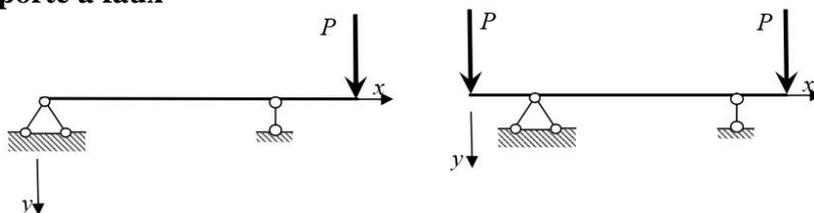


I.3.2 Types de poutres :

a) Entre appuis



b) Poutres en porte à faux

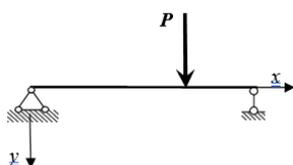


c) Poutres encastrée

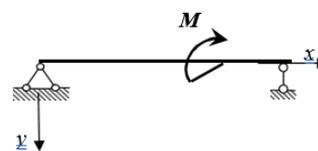


I.3.4 Types de charges :

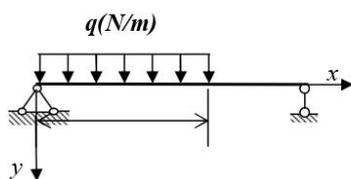
a) Charge concentrée ou ponctuelle



b) couple ou moment concentré

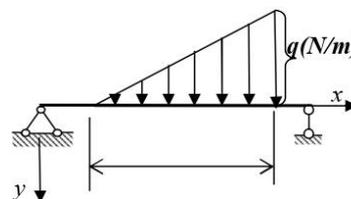


c) charge uniformément répartie



$q(N/m)$: Constante.

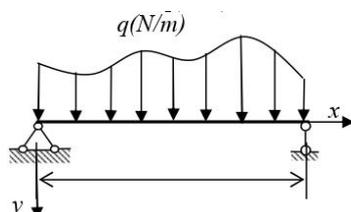
d) charge répartie uniformément variable ou charge linéaire



$q(N/m) = ax + b$

e) charge répartie quelconque

$q(N/m) = f(x)$



I.4. Comportement des poutres sous des sollicitations simples Flexion plane (simple)

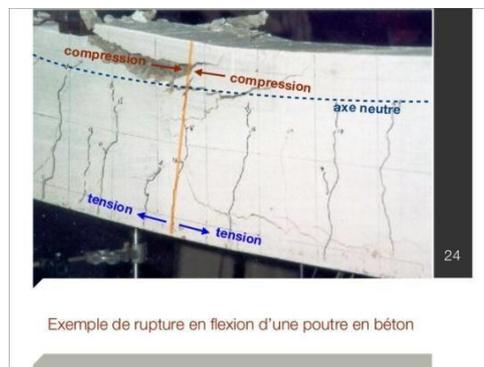
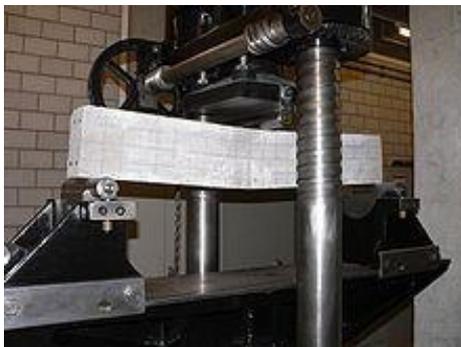
I.4.1. Essai de flexion :

L'essai de flexion consiste à disposer une poutre sur des appuis soumise à une charge F et placé un comparateur en dessous de la poutre pour mesurer les déformations. La déformation subite par la poutre on l'appelle la flèche.

On constate que les fibres situées dans la partie supérieure seront **tendues** (phénomène de traction) tandis que celles situées en partie inférieure seront comprimées (phénomène de compression). Entre ces deux régions il existe une fibre qui ne reste ni tendue ni comprimée : **la fibre neutre**.

La flèche dépend de quatre facteurs :

La norme de la charge -La position de la charge- La forme et le matériau de la poutre -La longueur de la poutre.



Exemple de rupture en flexion d'une poutre en béton

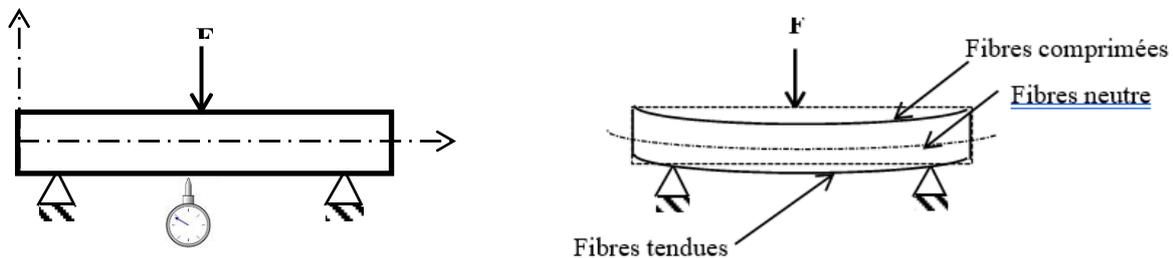


Figure I.1 Essai de la flexion d'une poutre réelle et modélisée

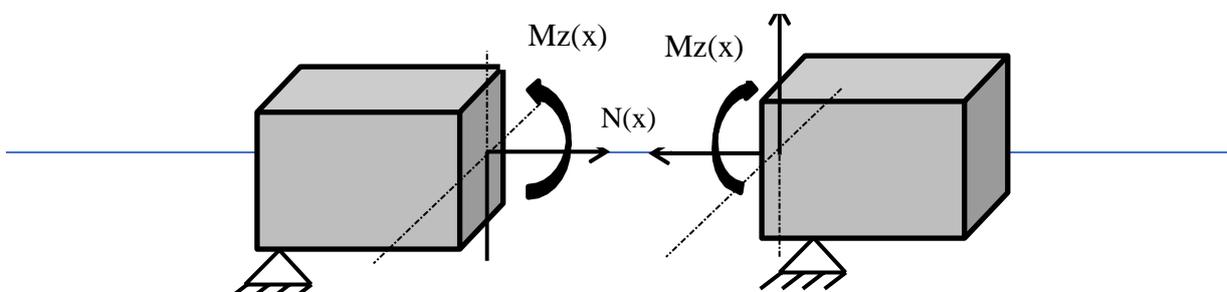
I.4.2. Définition d'une flexion simple (plane) :

Une poutre sollicitée à la flexion plane simple, lorsque le système des forces extérieures se réduit à un système plan et que toutes les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

I.4.3. Efforts internes

I.4.3. 1 Définition

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant M_f (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T). Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue **une coupure fictive** à la distance x de l'origine isolant le tronçon **1**, on obtient l'effort tranchant T et le moment fléchissant M_f (on obtient respectivement $-T$ et $-M_f$).



A

$N(x)$: Effort normal à l'abscisse (x)

$T(x)$: Effort tranchant (cisaillement) à l'abscisse se sont des forces qui vont faire glisser verticalement la poutre sous sollicitation extérieur. Il est moins la somme algébrique des forces verticales sur toute section d'une poutre à droite de la section.

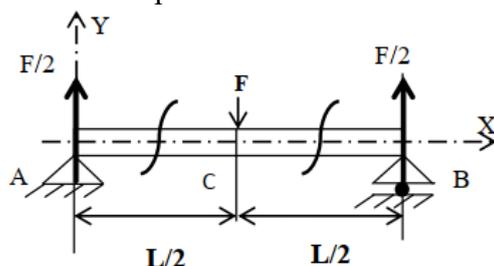
$M_z(x)$: Moment fléchissant qui va permettre d'une part de faire fléchir de la poutre et d'autre part va provoquer une rotation ou une courbure de section de la poutre. Il est la somme algébrique des moments de toutes les forces agissant à droite de la section.

Remarque :

- le cas $M_f \neq 0$ avec $T = 0$ correspond à de la flexion pure.
- le cas $M_f \neq 0$ avec $T \neq 0$ correspond à de la flexion simple.

I.4.3. Calcul et le traçage des diagrammes des efforts internes

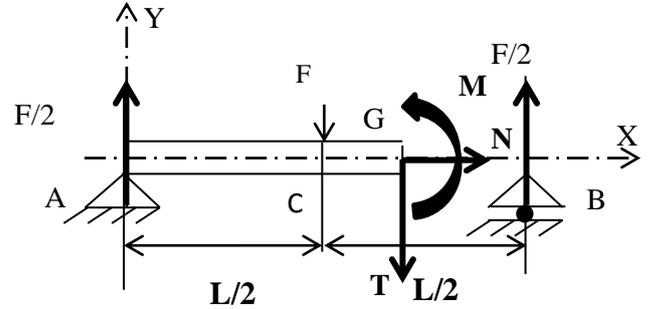
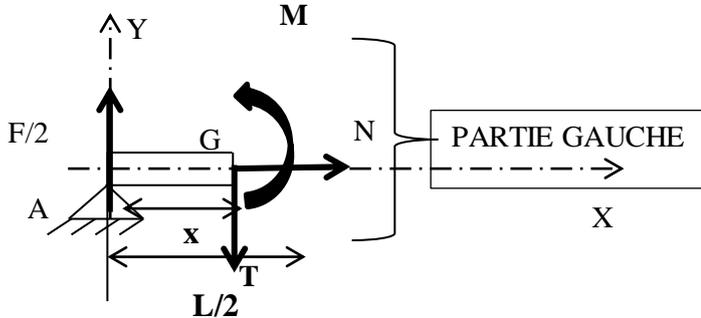
On prend l'exemple



1)- Calcul des inconnus (des réactions):

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\begin{cases} \sum F_x=0 \text{ RAx}=0 \\ \sum F_y=0 +\text{RAy}+\text{RBy}-F=0 \\ \sum M_z/a=0 \text{ RBy}\cdot L-F\cdot L/2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{RAx}=0 \\ \text{RAy}=F/2 \text{ KN} \\ \text{RBy}=F/2\text{KN} \end{cases}$$



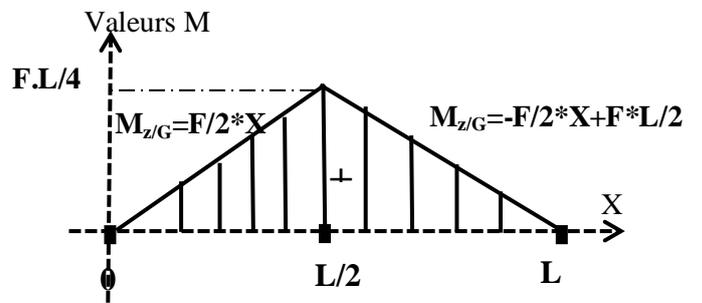
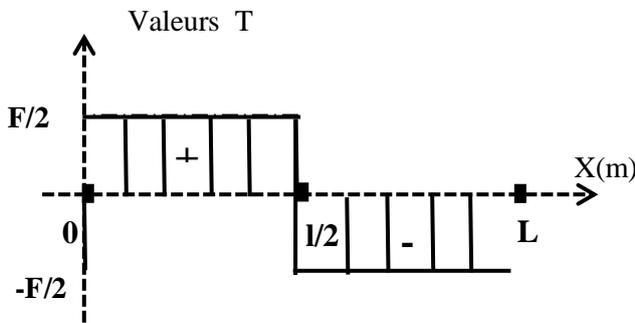
2)- Calcul des efforts internes (cohésions):

On vous donne dans la suite les étapes principales pour déterminer les forces internes

Choisir d'une origine des abscisses x et y. Dans notre cas le point A (voir la figure ci-dessous). En générale l'origine sera dans la partie gauche de la poutre.

Dessiner le système équivalent contenant les abscisses X et Y et le nombre des coupures. Dans notre cas on a deux coupures à faire. Parce que le nombre des coupures suit les points critiques par exemple : s'il y a une charge au milieu de la poutre on fait une subdivision la ligne moyenne en deux tronçons avant la sollicitation et après.

Représenter graphiquement des diverses fonctions de T(x), N(x), Mz(x). L'objectif du traçage ces diagrammes c'est pour avoir la répartition des contraintes et d'anticiper la valeur du moment où la poutre va se détériorer.

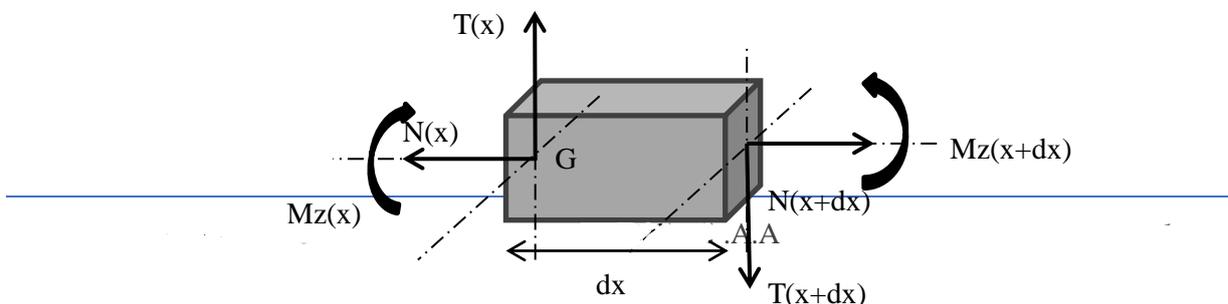


Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées

Une fois que l'orientation de l'abscisse curviligne définie, il existe différentes conventions d'orientation. Nous utiliserons la suivante, appelée convention de l'ingénieur :

- l'effort normal est positif en traction ;
- l'effort tranchant est positif lorsqu'il directement orthogonal à l'effort normal positif ;
- le moment fléchissant est positif lorsqu'il tend la fibre inférieure.

I.4.5. Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant



On fait la somme des moments par rapport au point G.

$$\sum M_g = 0$$

$$-M_z(x) + M_z(x + dx) - T(x + dx) \cdot dx = 0$$

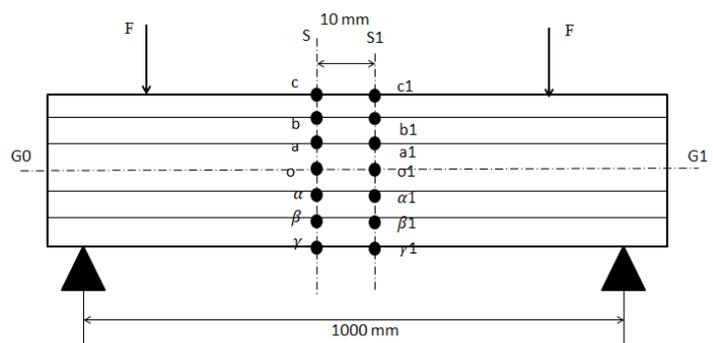
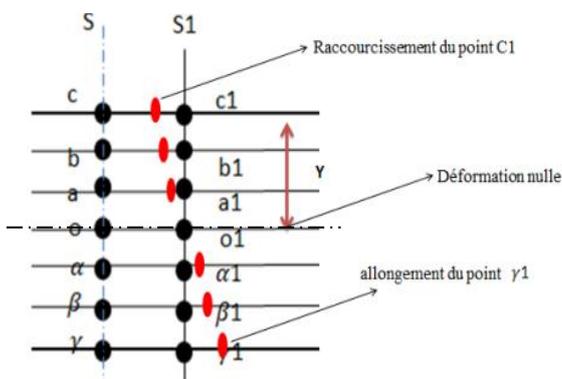
$$-M_z(x) + M_z(x) + \frac{dM_z(x)}{dx} \cdot dx - T(x) \cdot dx - \frac{dT(x)}{dx} (dx)^2 = 0$$

$$T(x) = + \frac{dM_z(x)}{dx}$$

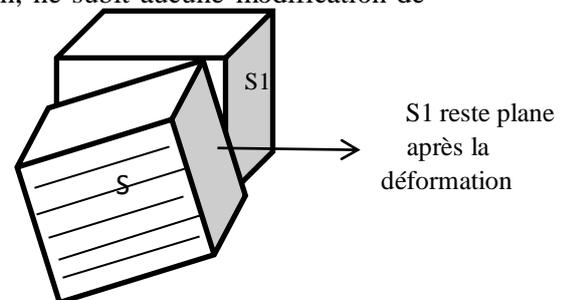
I.4.6. Déformations des poutres fléchies dû à la flexion simple:

Lorsqu'une poutre fléchie, elle prend une forme courbe. La partie supérieure se raccourcit et que la partie inférieure s'allonge. Dans les paragraphes suivants on démontrera les différentes réponses (déformations, déplacements et contraintes) existées dans une poutre sollicitée à la flexion simple.

I.4.6. 1. Déformation longitudinale d'une poutre fléchie

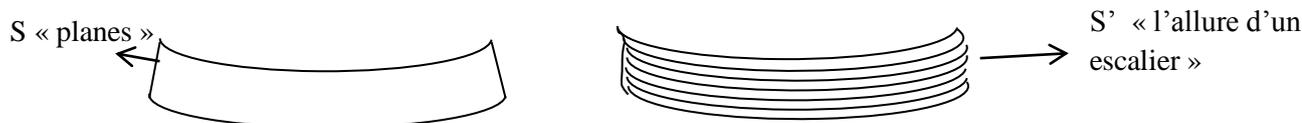


- Pour une charge quelconque les allongements ou raccourcissements des fibres sont proportionnels aux distances y de ces fibres à la droite médiane.
- La fibre médiane G_0G_1 ne change pas de longueur, on l'appelle: ligne neutre (ou fibre neutre).
- Tout le plan horizontal, de tracé G_0G_1 avant déformation, ne subit aucune modification de longueur; c'est le plan neutre ou la couche neutre.
- Les sections droites, verticales quand la charge est nulle, changent de position au cours de la déformation mais restent planes.



I.4.6. 2. Cisaillement longitudinal

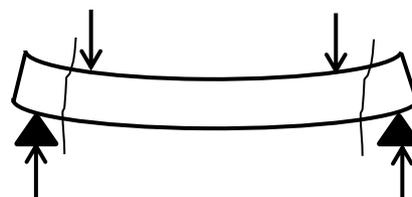
On va comparer le comportement d'une poutre monobloc avec un ensemble de plusieurs poutres de même longueur de même largeur et de 5 mm d'épaisseur (Exemple d'un cahier et d'une boîte élastique)



Dans le cas de la poutre monobloc, homogène, isotrope, les sections terminales S restent planes, Dans le cas du paquet de la poutre la section S' a pris l'allure d'un escalier, cela provient de ce que chaque lame glisse sur ses voisines dans le sens longitudinal est que rien, si ce n'est le frottement, n'empêche le glissement. Par conséquent la déformation par flexion d'une poutre, il existe une tendance à la formation de plans horizontaux de glissement, si ceci ne se produit pas effectivement, c'est que des forces intérieures s'y opposent, ces forces intérieures créent des contraintes qui sont dites contraintes de cisaillement longitudinal.

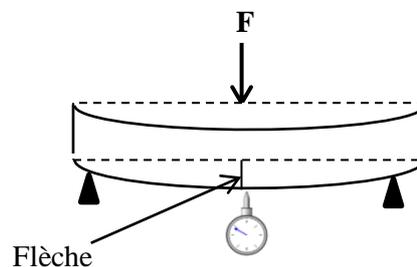
I.4.6. 3. Cisaillement transversal déformations dues à l'effort tranchant

La flexion sous des forces perpendiculaires à l'axe, s'accompagne, au moins dans certaines régions, d'un cisaillement transversal, donc de contrainte de cisaillement agissant dans les sections droites,



I.4.6. 4. Fleche (déplacement vertical)

La flèche dépend des charges et du mode de chargement, et qu'elle dépend, de façon apparemment complexe, des dimensions et des formes de la section ; pour des sections rectangulaires, la hauteur a une influence beaucoup plus grande que la largeur.



I.4.7. Contraintes des poutres fléchies dû à la flexion simple

- Nous voudrions avoir une idée de la répartition des contraintes dans une section droite quelconques S .

Chaque élément ΔS de la surface S reçoit l'action de l'autre tronçon de la poutre. Cette action se traduit :

Par des forces normales à la section qui produisent des allongements ou des raccourcissements des fibres. Si nous appelons σ la contrainte normale de traction ou de compression sur la fibre entourée par ΔS , la force normale sur cette fibre a pour valeur $\sigma \cdot \Delta S$.

Nous avons vu que les contraintes σ sont proportionnelles aux distances à la couche neutre.

L'extrémité de tous les vecteurs de contraintes normales se situent sur une droite, on dit que la répartition des contraintes normales est linéaire, ou que les contraintes normales sont réparties suivant un digramme triangulaire.

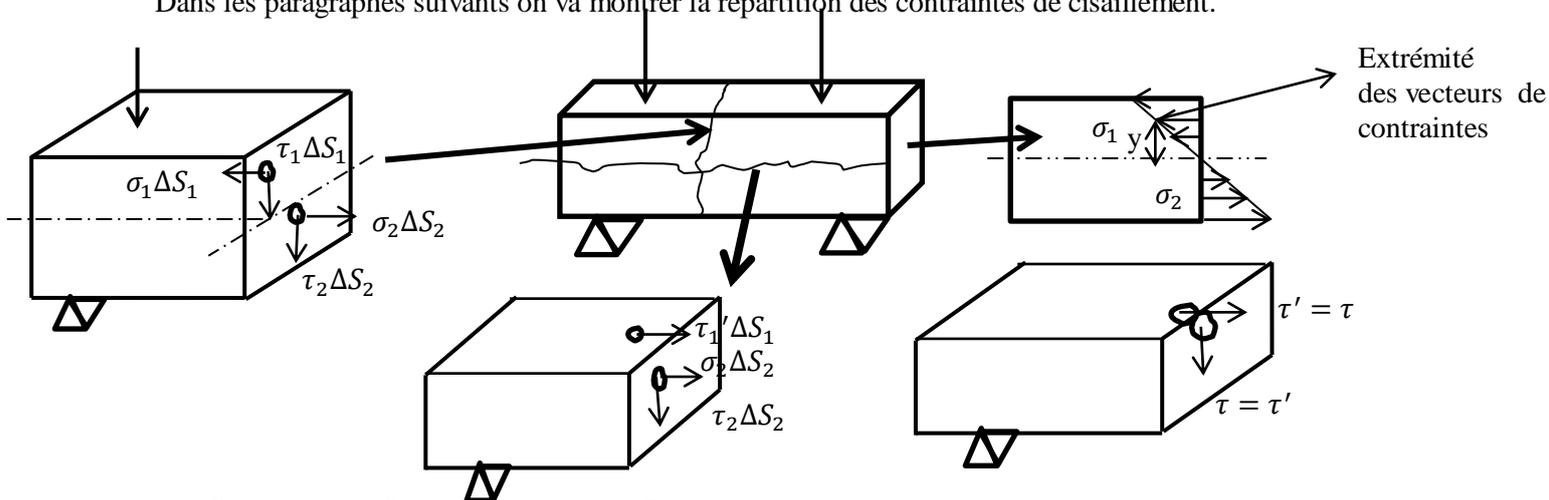
Par des forces tangentielles de cisaillement, situées dans le plan de section S . Si nous appelons

La contrainte tangentielle de cisaillement sur la fibre entourée par l'élément ΔS , la force tangentielle sur cette fibre a pour valeur $\tau \Delta S$

➤ Nous voudrions avoir une idée de la répartition des contraintes tangentielles de cisaillement longitudinal. Nous coupons la poutre par un plan horizontal, plan parallèle à la couche neutre.

La théorie de l'élasticité permet de démontrer que : si autour d'un point d'une poutre on imagine deux facettes perpendiculaires très petites, les contraintes tangentielles de cisaillement τ et τ' sur ces facettes sont égales. Ce principe connu sous le nom de réciprocité des contraintes tangentielles.

Dans les paragraphes suivants on va montrer la répartition des contraintes de cisaillement.



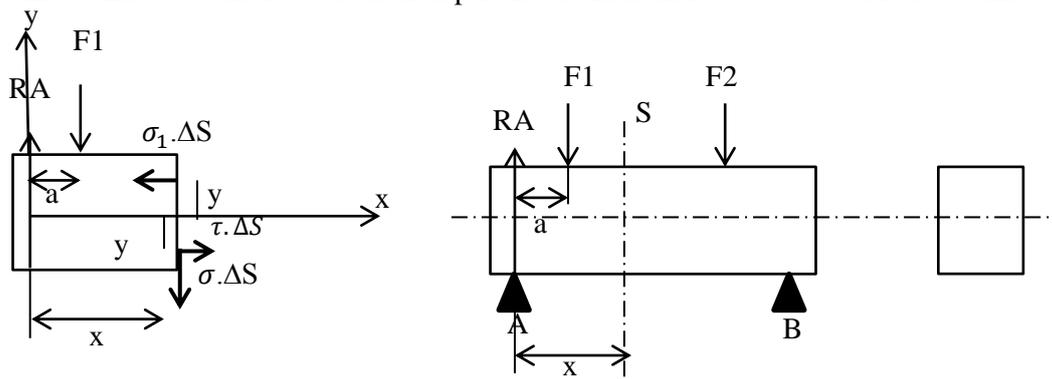
I.4.8. Equations fondamentales de la flexion

I.4.8.1. Conditions d'équilibre, recherche des actions de contact aux appuis (réactions) :

L'application des équations de la statique a permis de trouver les valeurs inconnues des réactions d'appuis.

I.4.8.2. Equation des contraintes dans une section droite d'une poutre fléchie en fonction des efforts intérieurs

Considérons une poutre droite homogène et isotrope de section constante, dont toutes les dimensions sont connues. Elle est sollicitée à la flexion par un certain nombre de forces verticales connues.



Les forces inconnues dues aux contraintes normales σ appliquées sur chaque élément de surface de la section droite S , les forces inconnues dues aux contraintes de cisaillement τ appliquées sur chaque élément de surface de la section droite S . nous avons donc deux forces de la forme $\sigma \cdot \Delta S$ et $\tau \cdot \Delta S$.

Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -\sum \sigma \cdot \Delta S = 0 \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow +RA - F1 + \tau \cdot \Delta S = 0 \rightarrow \tau \cdot \Delta S = -RA + F1 \dots (2)$$

$$\sum M_z/A = 0 \rightarrow -RA \cdot X + F1 \cdot (x - a) + \sum \sigma \cdot \Delta S \cdot y = 0 \rightarrow +\sum \sigma \cdot \Delta S \cdot y = +RA \cdot X - F1 \cdot (x - a) \dots (3)$$

➤ **Contrainte normale**

$$+\sum \sigma \cdot \Delta S \cdot y = +RA \cdot X - F1 \cdot (x - a) \rightarrow$$

$+RA \cdot X - F1 \cdot (x - a) \rightarrow$ représente une fonction d'un moment fléchissant **Mf**

$$+\sum \sigma \cdot \Delta S \cdot y = Mf$$

Nous savons que la contrainte normale σ en un point de la section droite est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe neutre. la contrainte σ est de la forme $\sigma = ky$ (K : constante à déterminer).

$$+k \sum \Delta S \cdot y^2 = Mf$$

$\sum \Delta S \cdot y^2 = I_n \rightarrow$ le moment quadratique de la section par rapport à l'axe neutre

$$\begin{aligned} \sigma &= ky \rightarrow k = \frac{\sigma}{y} \\ +\frac{\sigma}{y} I_n &= Mf \rightarrow \sigma = \frac{Mf \cdot y}{I_n} \end{aligned}$$

Cette relation donne la valeur de la contrainte σ en un point situé à la distance y de la couche neutre, dans une section de moment d'inertie I_n , le moment fléchissant dans cette section étant Mf .

➤ **Contrainte tangentielle de cisaillement transversal**

A partir de l'équation d'équilibre (2)

$$\sum \tau \cdot \Delta S = -RA + F1 \dots (2)$$

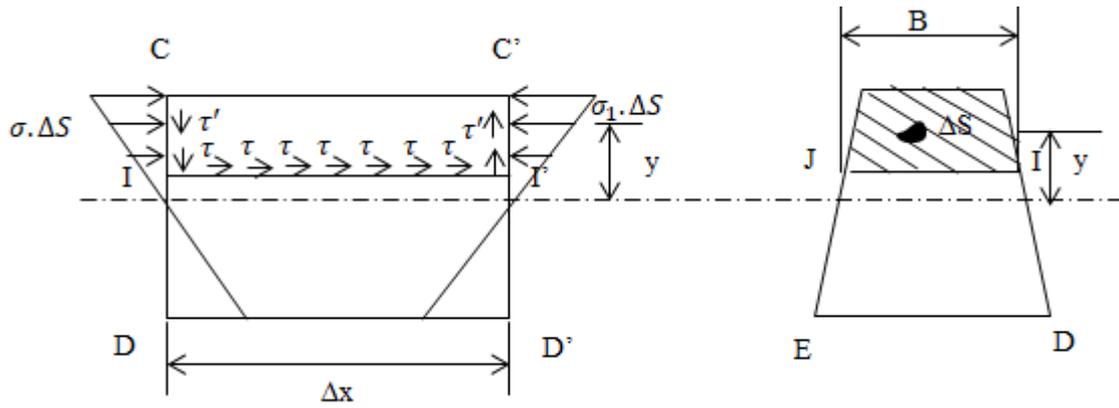
$-RA + F1 \rightarrow$ représente une fonction d'un effort tranchant **T**

$$\sum \tau \cdot \Delta S = T$$

Dans le cas de cisaillement pur, nous ignorons la loi de répartition de la contrainte τ sur la section. Donc il y a une contrainte moyenne τ_{moyen}

$$\tau_{moyen} = \frac{T}{S}$$

➤ **Contrainte tangentielle de cisaillement longitudinale**



On considère dans une poutre droite fléchie deux sections droites de traces CD $C'D'$ très voisins, distance de la longueur Δx et entre lesquelles aucune force n'est appliquée. Les contraintes de cisaillement longitudinal développées dans ce tronçon, coupons le par un plan perpendiculaire au plan longitudinal de la poutre, ce plan de section longitudinal ayant pour fibre II' .

Les forces extérieures agissant sur ce système matériel sont :

- 1- Sur la section CI , d'une part les forces $\sigma \cdot \Delta S$ dues aux contraintes normales σ , résultant du moment fléchissant Mf . D'autre part les forces $\tau' \cdot \Delta S$ dues aux contraintes tangentiels verticales τ' dans cette section.
- 2- Sur la section $C'I'$, d'une part les forces $\sigma_1 \cdot \Delta S$ dues aux contraintes normales σ_1 , résultant du moment fléchissant Mf_1 . D'autre part les forces $\tau' \cdot \Delta S$ dues aux contraintes tangentiels verticales τ' dans cette section.
- 3- Sur la section II' les forces $\tau \cdot \Delta S$ dues aux contraintes de cisaillement longitudinal τ .

Si nous connaissons la loi de répartition des contraintes normales nous ignorons la loi de répartition des contraintes tangentiels transversales. Cependant, comme la longueur Δx est très petite, nous pouvons admettre que les contraintes tangentiels longitudinaux τ sont constantes sur toute la surface de longueur Δx et de largeur B .

Ecrivons l'équation de projection de ces forces sur l'axe $x'x$.

$$\sum \sigma \cdot \Delta S - \sum \sigma_1 \cdot \Delta S + \tau \cdot B \cdot \Delta x = 0$$

On a :

$$\sigma = \frac{Mf \cdot y}{I_n}, \quad \sigma_1 = \frac{Mf_1 \cdot y}{I_n}$$

$$\sum \frac{Mf \cdot y}{I_n} \Delta S - \sum \frac{Mf_1 \cdot y}{I_n} \Delta S + \tau \cdot B \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{Mf}{I_n} \sum y \Delta S - \frac{Mf_1}{I_n} \sum y \Delta S + \tau \cdot B \cdot \Delta x = 0$$

$$\frac{Mf - Mf_1}{I_n} \cdot \sum y \Delta S + \tau \cdot B \cdot \Delta x = 0$$

ou en divisant tous les termes par x

$$\frac{1}{I_n} \cdot \frac{Mf - Mf_1}{\Delta x} \cdot \sum y \Delta S + \tau \cdot B = 0$$

$$Mf_1 - Mf = \Delta Mf$$

$$Mf - Mf_1 = -\Delta Mf$$

Si on tend Δx vers zéro, la quantité $\frac{\Delta Mf}{\Delta x}$ tend vers la dérivée Mf' .

On sait que $\frac{dMf}{dx} = -T$ donc $\frac{Mf - Mf_1}{\Delta x} = T$.

En outre $\sum y \Delta S$ c'est le moment statique de la section de trace AI par rapport à l'axe neutre. On pose A' . on peut donc écrire.

$$\frac{1}{I_n} \cdot T \cdot S' + \tau \cdot B = 0$$

ou en considérant que les valeurs absolutes:

$$\tau = -\frac{T \cdot S'}{I_n \cdot B} = \left| -\frac{T \cdot S'}{I_n \cdot B} \right| = \frac{T \cdot A'}{I_n \cdot B}$$

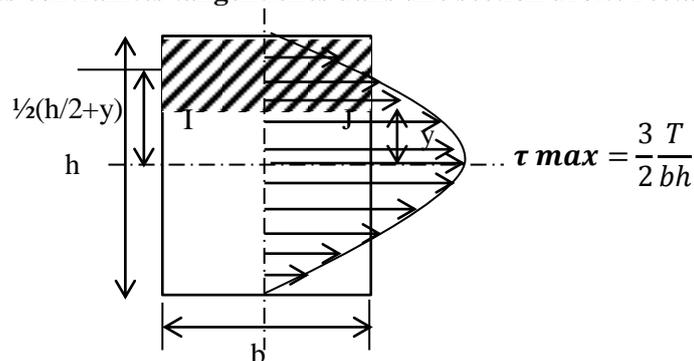
B : largeur de la section dans la couche considérée.

I_n : Moment d'inertie.

A' : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée

T : l'effort tranchant

➤ Répartition des contraintes tangentielles dans une section droite rectangulaire



$$\tau = +\frac{T \cdot A'}{I_n \cdot B}$$

$$A : A' = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$I_n = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau = +\frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

τ varie suivant une loi parabolique τ est maximum pour $y=0$, et a pour valeur :

$$\tau_{max} = 1.5 \frac{T}{bh}$$

τ est nul pour $y = \frac{h}{2}$

I.4.9. Condition de la résistance des poutres sollicitées à la flexion simple

➤ Par rapport aux contraintes normales

Pour assurer la résistance d'une poutre fléchie dans la section la plus dangereuse (section où M_f est maximum). Il faut que les contraintes de traction et de compression maximales ne dépassent pas les contraintes admissibles correspondantes.

Section symétrique :

$$|\sigma_{max}^-| = \left| \frac{M \cdot y_{max}}{I_z} \right| \leq \min(\sigma_-, \sigma_+)$$

Section non symétrique :

$$\begin{aligned} |\sigma_{max}^-| &\leq \sigma_- \\ |\sigma_{max}^+| &\leq \sigma_+ \end{aligned}$$

➤ **Par rapport aux contraintes tangentielles**

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où σ est maximale $\tau = \mathbf{0}$ par contre là où τ est maximale $\sigma = \mathbf{0}$.

$$\tau_{max} = \left| \frac{T \cdot A}{I_n \cdot B} \right| \leq [\tau_{admi}]$$