Partie des exercices avec solution

Exercice 1

a) Calcul la matrice de rigidité globale [K] de l'assemblage représenté sur la figure P3-1. Notez que [K] devrait être en termes A1, A2; A3; E1; E2; E3; L1; L2 et L3.

b) A1 = A2 = A3 = A; E1 = E2 = E3 = E et L1 = L2 = L3 = L. Si les nœuds 1 et 4 sont fixés et une force P agit au nœud 3 dans la direction positive x, trouve les déplacements des nœuds 2 et 3 en termes de A; E; L et P.

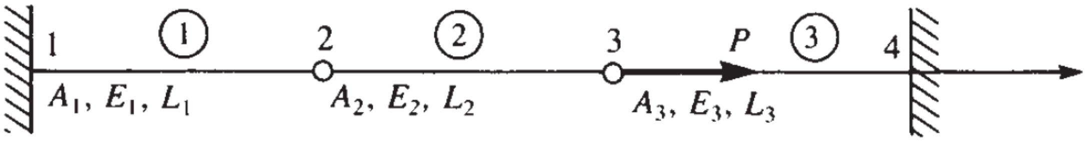


Figure. P3-1

a)

$$[k^{(1)}]=\frac{A_1E_1}{L_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[k^{(2)}]=\frac{E_2A_2}{L_2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[k^{(3)}]=\frac{A_3\,E_3}{L_3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[k]=\begin{bmatrix}\frac{A_1E_1}{L_1} & \frac{-A_1E}{L_1} & 0 & 0\\ \frac{-A_1E_1}{L_1} & \frac{A_1E_1}{L_1}+\frac{A_2E_2}{L_2} & \frac{-A_2E_2}{L_2} & 0\\ 0 & \frac{A_2E_2}{L_2} & \frac{A_2E_2}{L_2}+\frac{A_2E_2}{L_2} & -\frac{A_2E_2}{L_2}\\ 0 & 0 & \frac{-A_3E_3}{L_3} & \frac{-A_3E_3}{L_3}\end{bmatrix}$$

b)

$\frac{A_1E_1}{L_1} = \frac{E_2A_2}{L_2} = \frac{A_3\,E_3}{L_3} = \frac{AE}{L}$

$$[k]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On sait que {F}=[k]{d}

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} f_{1x} = ? \\ f_{2x} = 0 \\ f_{3x} = p \\ f_4 = ? \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow 0 = \frac{-AE}{L} u_2 - \frac{AE}{L} u_3 \rightarrow u_3 = 2u_2$

$P = \frac{-AE}{L} u_2 + \frac{2AE}{L} u_3$

$P = \frac{-AE}{L} u_2 + \frac{2AE}{L} u_3 (2u_2)$

$u_2 = \frac{1}{3}\frac{PL}{AE}$

$u_3 = 2\frac{1}{3}\frac{PL}{AE} \rightarrow u_3 = \frac{2}{3}\frac{PL}{AE}$

Exercice 2

Pour l’assemblage de barres représenté sur la figure P3-2, déterminer les déplacements nodaux, les forces dans chaque élément et les réactions (utilisez la méthode de rigidité directe pour ces problèmes).

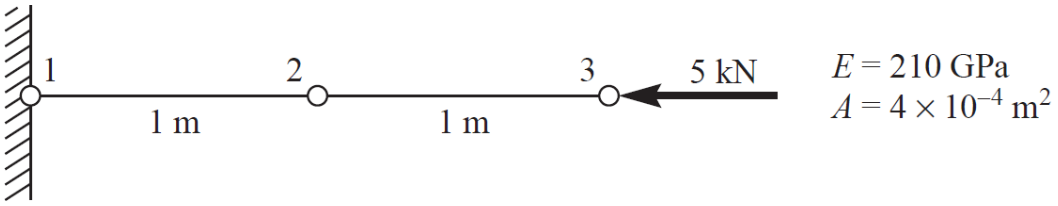


Figure P3-2.

Solution

Élément 1-2

$[k_{1-2}]$=84*$10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Élément 2-3

$[k_{2-3}]$=84*$10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

{f}=[k]{d} et $u_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} = ? \\ f_{2x} = 0 \\ f_{3x} = -500 \end{Bmatrix} = 84*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow 2u_2 - u_3 = 0 \rightarrow u_3 = 2u_2$

→ -5000= $84*10^6[u_2 + u_3]$

En remplaçant (1) en (2), nous avons

$\frac{-5000}{84*10^6}$=-$u_2 + 2u_2 \rightarrow u_2 = -0.595 * 10^{-4}$m

$u_3 = -1.19 * 10^{-4}$m

Element 1-3

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = 84*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.595 * 10^{-4} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{1x}^{(1)} = 5000N \\ f_{2x}^{(1)} = -5000N \end{matrix}$$

Element 2-3

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 84*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.595 * 10^{-4} \\ -1.19 * 10^{-4} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{2x}^{(2)} = 5000N \\ f_{3x}^{(2)} = -5000N \end{matrix}$$

$$F_{1x} = 84 * 10^6 [1 \quad -1 \quad 0] \begin{Bmatrix} -0.595 * 10^{-4} \\ -1.19 * 10^{-4} \end{Bmatrix} \rightarrow F_{1x} = 5000\text{N}$$

Exercice 3

Pour l'assemblage de barres représenté sur la figure P3-3, déterminer les déplacements nodaux, les forces dans chaque élément et les réactions (utilisez la méthode de rigidité directe pour ces problèmes).

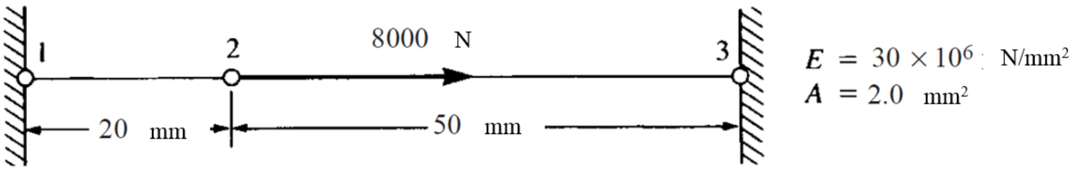


Figure P3-3.

Solution

Elément 1-2

$$[k_{1-2}] = 3*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément 2-3

$$[k_{2-3}] = 1.2*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité globale

$$[k] = 10^6 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3+1.2 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Déplacement

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} = 8000 \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3+1.2 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

$u_2 = 1.905*10^{-3}$mm

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3+1.2 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.905 * 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & f_{1x} = -5715 \text{ N} \\ \rightarrow & f_{2x} = -8000 \text{ N} \\ & f_{3x} = -2286 \text{ N} \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 3*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.905 * 10^{-3} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{1x}^{(1)} = -5715N \\ f_{2x}^{(1)} = -5715N \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 1.2*10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.905 * 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{2x}^{(2)} = 2286 \, N \\ f_{3x}^{(2)} = -2286 \, N \end{matrix}$$

Exercice 4

Pour l’assemblage de barres représenté sur la figure P3-4, déterminer les déplacements nodaux, les forces dans chaque élément et les réactions (utilisez la méthode de rigidité directe pour ces problèmes).

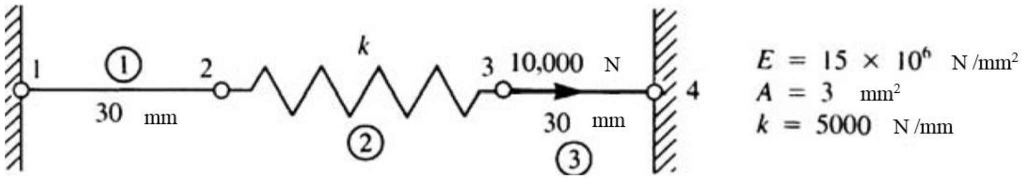


Figure P3-4

Solution

$$[k_{1-2}] = [k_{3-4}] = 1.5 * 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2-3}] = 5000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_{3x} = 10000 \\ f_{4x} = 0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1500 & -1500 & 0 & 0 \\ -1500 & 1505 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 1505 & -1500 \\ 0 & 0 & -1500 & 1500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 10000 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1505 & -5 \\ -5 & 1505 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u_{2=2..21*10^{-5}} \text{ mm} \\ u_3 = 6.65 * 10^{-3}\ mm \end{matrix}$$

Les réactions

F_{1x}=$(1500*10^3)(u_3) \rightarrow F_{1x} = -33.15$ N

F_{4x}=$(1500*10^3)(u_3) \rightarrow F_{4x} = -9975$ N

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = 1.5 \text{ x } 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.21 \text{ x } 10^{-5} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_{1x}^{(1)} = -33.15 \text{ N} \\ f_{2x}^{(1)} = 33.15 \text{ N} \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 5000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.21 \text{ x } 10^{-5} \\ 6.65 \text{ x } 10^{-3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_{2x}^{(2)} = -33.15 \text{ N} \\ f_{3x}^{(2)} = 33.15 \text{ N} \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = 1.5 \text{ x } 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6.65 \text{ x } 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_{3x}^{(3)} = 9975 \text{ N} \\ f_{4x}^{(3)} = -9975 \text{ N} \end{matrix}$$

Exercice 5

Pour l'assemblage de barres représenté sur la figure P3-5, déterminer les déplacements nodaux, les forces dans chaque élément et les réactions (utilisez la méthode de rigidité directe pour ces problèmes).

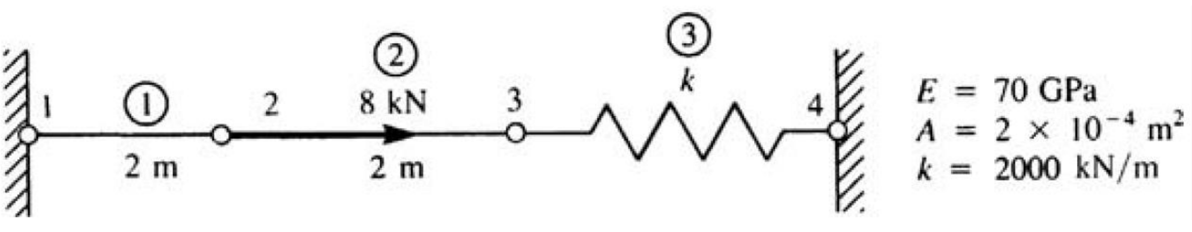


Figure P3-5.

Solution

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = 7000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(2)}] = 2000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{F\} = [k]\{d\}$

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} = ? \\ F_{2x} = 8kN \\ F_{3x} = 0 \\ F_{4x} = ? \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow 8 = 10^3 [14u_2 - 7u_3]$$

$$0 = 10^3 [-7u_2 + 9u_3]$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{7}{9} u_2$$

En remplaçant (2) en (1)

$$\Rightarrow \frac{8}{10^3} = 14 u_2 - 7 \text{ x } \frac{7}{9} u_2$$

$$\Rightarrow u_2 = 0.9351 \text{ x } 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow u_3 = 0.7273 \text{ x } 10^{-3} \text{ m}$$

Element (1)

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = 7 \text{ x } 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.9351 \text{ x } 10^{-3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.546 \\ 6.546 \end{Bmatrix} \text{kN}$$

Element (2)

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = 7 \text{ x } 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9351 \text{ x } 10^{-3} \\ 0.7273 \text{ x } 10^{-3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.455 \\ -1.455 \end{Bmatrix} \text{kN}$$

Element (3)

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = 2 \text{ x } 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7273 \text{ x } 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.455 \\ -1.455 \end{Bmatrix} \text{kN}$$

$$F_{1x} = 10^3 [7 \quad -7] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.9351 \text{ x } 10^{-3} \end{Bmatrix} = F_{1x} = -6.546 \text{ kN}$$

$$F_{4x} = 10^3 [-2 \quad 2] \begin{Bmatrix} 0.7273 \text{ x } 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = F_{4x} = -1.455 \text{ kN}$$

Exercice 6

Pour le Treille supportée par le ressort au nœud 1 de la figure P3-33 (a), déterminer les déplacements nodaux et les contraintes dans chaque élément. Soit E= 210 GPa et A = 5 10^4 m^2 pour les deux éléments de treillis.

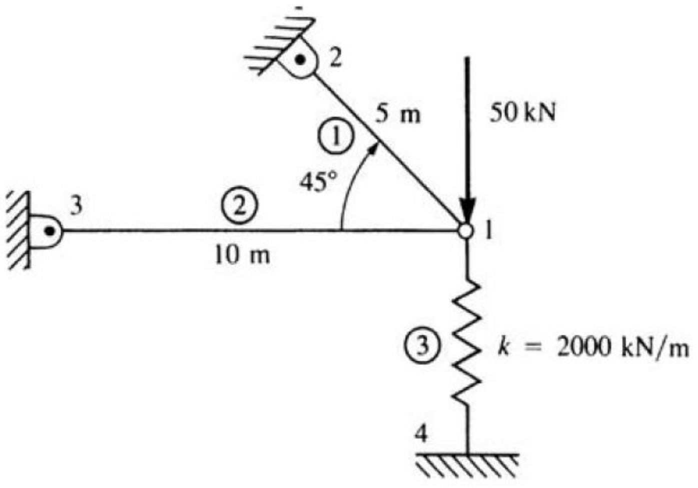


Figure P3–33(a)

Solution

Elément 1-2 ; θ=135° C^2=0.5, CS=-0.5, S^2=0.5

$$[k_{1-2}] = \frac{(210\ X10^9)(5X10^{-4})}{5}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[k_{1-2}] = 105X10^5\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément 1-3 ; θ=180° C^2=1, CS=0, S^2=0

$$[k_{1-3}] = \frac{(210\ X10^9)(5X10^{-4})}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{1-3}] = 105X10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément 1-2 ; θ=270° C^2=0, CS=0, S^2=1

$$[k_{1-4}] = 20\ X10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

Les conditions aux limites

$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$

La matrice finale

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = -50 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 210 & -105 \\ -105 & 125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = 210\ u_1 - 105\ v_1 \Rightarrow v_1 = 2\ u_1$

$-\ 50000 = 105\ [-\ 105\ u_1 + 125\ (2\ u_1)]$

$\Rightarrow u_1 = -\ 3.448 \cdot 10^{-3}$ m

$\Rightarrow v_1 = -\ 6.896 \cdot 10^{-3}$ m

$$\sigma_{1-2} = \frac{210X10^9}{5m} [0.707 \quad -0.707 \quad -0.707 \quad 0.707] \begin{Bmatrix} -3.448X10^{-3} \\ -6.896X10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{1-2} = 102.4MPa\ (T)$$

$$\sigma_{1-3} = \frac{210X10^9}{10m} [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{Bmatrix} -3.448X10^{-3} \\ -6.896X10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{1-2} = -72.4\ MPa\ (C)$$

$$F_s = \left(200\frac{KN}{m}\right)(-6.896X10^{-3}m)$$

$$F_s = 13.792\ KN$$

$$f_{1-3} = 35.6\ KN$$

$$f_{1-2} = 51.2\ KN$$

$$\sum F_y = 0 = -50 + 13.79 + 36.198 = 0$$

Chapitre 3

Partie des exercices avec solution

Exercice 1

Pour la poutre représentée sur la figure P4-3, déterminer la rotation au support A et le déplacement sous la charge P. Déterminer les réactions. Dessinez les schémas de force de cisaillement et de flexion. EI est constant tout la long de la poutre.

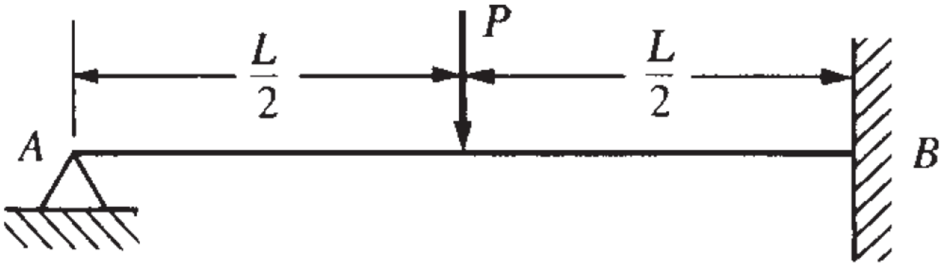


Figure P4-3.

Solution

1. *On pose* $\frac{L}{2} = l$

Elément 1-2

$$[k_{1-2}] = \frac{ET}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6l \\ 6L & 4l^2 & -6l & -2l^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6l \\ 6L & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix};$$

Elément 2-3

$$[k_{2-3}] = \frac{ET}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6l \\ 6L & 4l^2 & -6l & -2l^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6l \\ 6L & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_1 = 0 \\ F_{2y} = -P \\ M_2 = 0 \\ F_{2y} = ? \\ M_3 = ? \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_{1=0} \\ \theta_1 = ? \\ v_{2=?} \\ \theta_{2=?} \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{Bmatrix}?$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 6l & 24 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} = \frac{ET}{L^3}\begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 & -6l \\ 2l^2 & 8l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 24 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$N = K_{\beta\beta} - K_{\beta\alpha}K_{\alpha\alpha}^{-1}K_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{EI}{l^3}\left[24 - [-6l\ 0]\begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -6l \\ 0 \end{Bmatrix}\right] = 13.7148\frac{EI}{l^3}$$

$$d_\beta = N^{-1}F \Longrightarrow v_2 = \frac{l^3}{13.7148EI}(-P) = \frac{-7l^3}{96EI} \Rightarrow v_2 = \frac{-7Pl^3}{768EI}$$

$$\{d_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}^{-1}][K_{\alpha\beta}]\{d_\beta\} \Longrightarrow \{d_\alpha\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -6l \\ 0 \end{Bmatrix}\left[\frac{-7Pl^3}{96EI}\right] \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-pl^2}{8EI} \\ \frac{pl^2}{32EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-pl^2}{32EI} \\ \frac{pl^2}{8EI} \end{bmatrix}$$

En remplaçant l'équation dans la matrice globale, nous avons

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & -12 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -6l & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 12- & 2l \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-Pl^2}{8EI} \\ \frac{-7Pl^3}{96EI} \\ \frac{Pl^2}{32EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

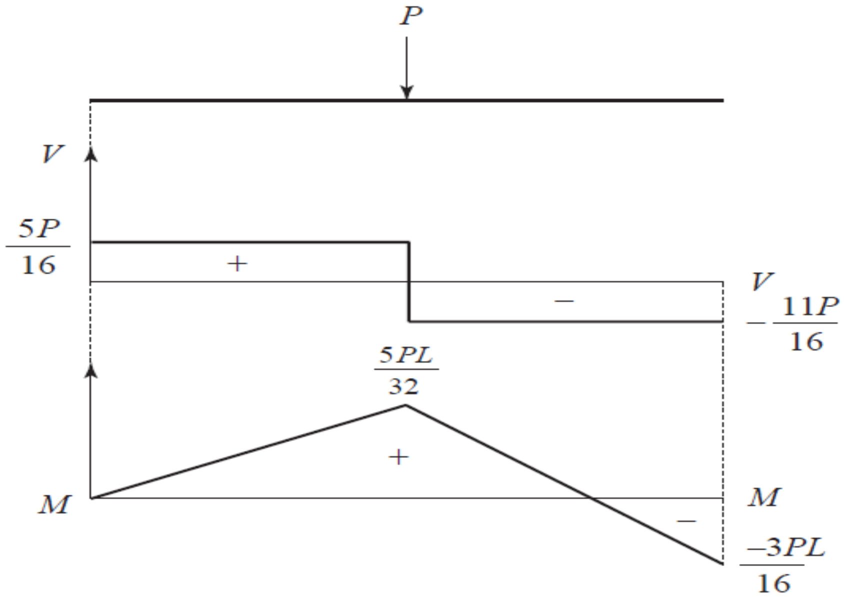
$$F_{1y} = \frac{EI}{l^3}\left[\frac{-6Pl^3}{8EI} + \frac{7Pl^3}{8EI} + \frac{6Pl^3}{32EI}\right] = \frac{EI}{l^3}\frac{10Pl^3}{32EI} \Rightarrow F_{1y} = \frac{5P}{16}$$

De même

$M_1 = 0$ $\qquad\qquad$ $F_{3y} = \frac{11P}{16}$

$F_{2y} = -P$ $\qquad\qquad$ $M_3 = \frac{-3PL}{16}$

$M_2 = 0$



Exercice 2

Pour la poutre représentée sur la figure P4-7, déterminer la rotation au support A et la rotation et le déplacement sous la charge P. Déterminer les réactions. Dessinez les schémas de force de cisaillement et de flexion. EI est constant tout la long de la poutre.

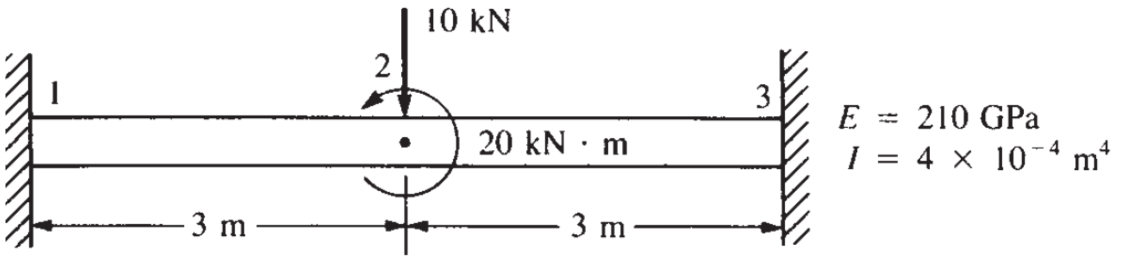


Figure P4-7

Solution

Elément 1-2

$$[K_{1-2}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{symmetry} & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Elément 2-3

$$[K_{2-3}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{symmetry} & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Condition aux limite

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

-0.0032142=24$v_2 \Longrightarrow v_2 = -1.34 * 10^{-4}\text{m}$

0.0064285=72$\theta_2 \Longrightarrow \theta_2 = 8.93 * 10^{-5}\text{rad}$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{(210 * 10^9)(4 * 10^{-4})}{3}\begin{bmatrix} 24 & 12l & -24 & 6l & 0 & 0 \\ 12l & 8l^2 & -12l & 4l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -12l & 24 & -6l & -12 & 6l \\ 24 & 4l^2 & -6l & 12l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.34 * 10^{-4} \\ 8.93 * 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{2y} = 3.1 * 10^6\big(-12(1.34 * 10^{-4}) + 6(3)(8.93 * 10^{-5})\big) \Rightarrow \mathcal{F}_{1y} = 10000N$$

$M_1 = 3.1 * 10^6(-6(3)(1.34 * 10^{-4}) + 2(3)^2(8.93 * 10^{-5})) \Rightarrow M_1 = 12500N.m$

De même

$F_{2y} = -10000N$

$M_2 = 20000N.m$

$F_{3y} = 1.87N$

$M_3 = -2500N.m$

Element 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ m_1 \\ F_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{(210*10^{9)})(4*10^{-4})}{(3)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.34 * 10^{-4} \\ 8.93 * 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow F_{1y} = 10000N$

$M_1 = 12500n.m$

$F_{2y} = -10000N$

$M_2 = 17500N.m$

Element 2-3

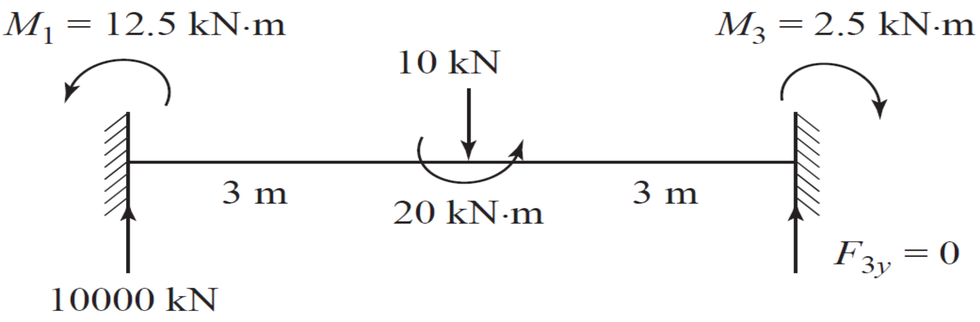
$$\begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{2y} \\ m_2 \\ \mathcal{F}_{3y} \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{(210*10^{9)})(4*10^{-4})}{(3)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.34 * 10^{-4} \\ 8.93 * 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow F_{2y} = 1.87N$

$M_2 = 2500n.m$

$F_{3y} = 1.87N$

$M_3 = -2500N.m$



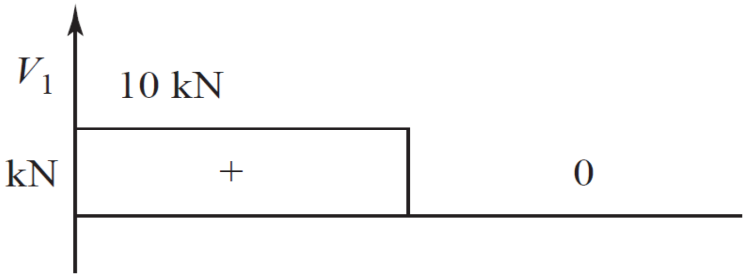


Diagramme de cisaillement

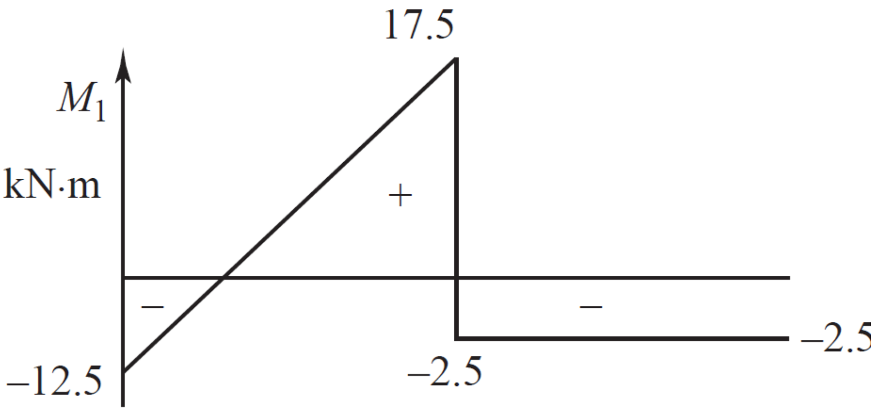


Diagramme de moment

Exercice 3

Pour la poutre représentée sur la figure P4-10, déterminer la rotation au support A et la rotation et le déplacement sous la charge P. Déterminer les réactions. Dessinez les schémas de force de cisaillement et de flexion. EI est constant tout la long de la poutre.

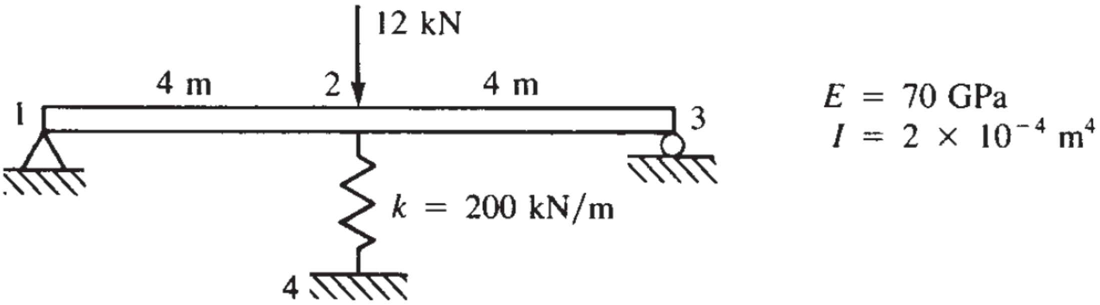
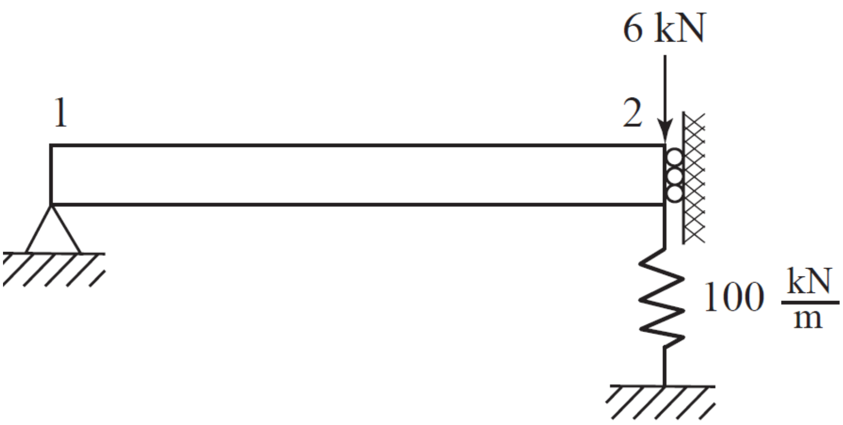


Figure P4-10.

Solution

Application de la symétrie



$$[\mathrm{K}] = \frac{\mathrm{ET}}{\mathrm{L}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\mathrm{l} & -12 & 6\mathrm{l} \\ & 4\mathrm{l}^2 & 6\mathrm{l} & 2\mathrm{l}^2 \\ & & \frac{12+\mathrm{KL}^2}{\mathrm{EI}} & -6\mathrm{l} \\ \text{symmetry} & & & 4\mathrm{l}^2 \end{bmatrix}$$

Application les conditions aux limites $v_1 = 0, \theta_2 = 0$

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{M}_1 = 0 \\ \mathrm{F}_{2y} = -6000\mathrm{N} \end{Bmatrix} = \frac{(70*10^9)(2*10^{-4})}{4^3}) \begin{bmatrix} 4\mathrm{l}^2 & 6\mathrm{l} \\ -6\mathrm{l} & \frac{12+\mathrm{KL}^2}{\mathrm{EI}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = 4\mathrm{l}^2\theta_1 - 6\mathrm{lv}_2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{6}{4\mathrm{l}}\mathrm{v}_2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{6}{16}\mathrm{v}_2 - 6000 = 218750[-24\left(\frac{6}{16}\right)\mathrm{v}_2 + 12.457\mathrm{v}_2] \Rightarrow \mathrm{v}_{2=-7.9338*10^{-3}\mathrm{m}}$

$$\theta_1 = \frac{6}{16}(-7.9338 * 10^{-3}) \Rightarrow \theta_1 = -2.9752 * 10^{-3}\mathrm{rad}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{1y} \\ M_1 \\ \mathcal{F}_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{(70*10^9)(2*10^{-4})}{4^3}) \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12.457 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -2.9752 * 10^{-3} \\ -79336 * 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$F_{1y} = 5.208KN \uparrow, M_2 = 20.83KN.m \circlearrowleft$

$F_{2y} = 0KN \downarrow$

$F_{spring} = 1.587KN$

Suivent la symétrie $F_{3y} = 5.208KN \uparrow$

Exercice 4

Déterminez la flèche au point milieu de la poutre, les réactions et tracez les diagrammes de force de cisaillement et de flexion pour la poutre fixé aux extrémités et soumis à une charge uniformément répartie w représentée sur la figure P4-13. EI est constante. Comparez vos réponses avec la solution classique.

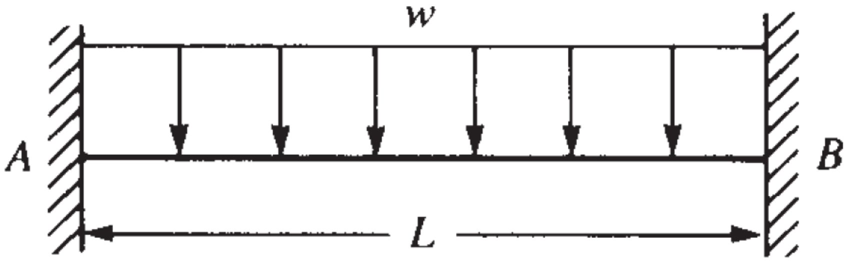
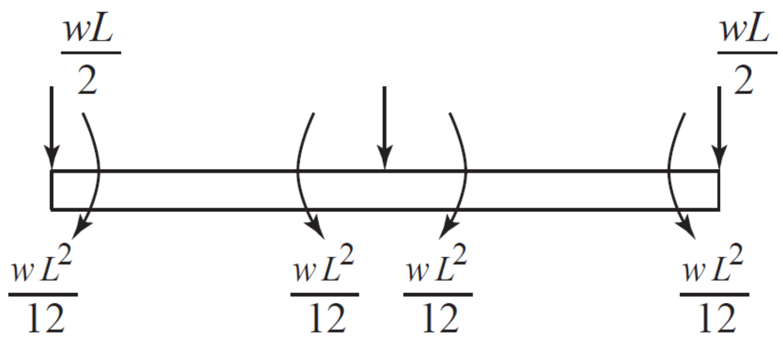


Figure P4-13

Solution



Application de la condition aux limites

$v_1 = \emptyset_1 = v_3 = \emptyset_3 = 0$

$$\begin{Bmatrix} -wl \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{ET}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \emptyset_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow 0 = \frac{ET}{l^3}(8l^2\emptyset_2) \Rightarrow \emptyset_2 = 0$$

$-wl = \frac{ET}{l^3}(24v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{-wl^4}{24ET}$

$F_{1y}^{(6)} = \frac{wl}{2}, m_1^{(6)} = \frac{wl^2}{4}, F_{2y}^{(6)} = -wl, m_2^{(6)} = 0$

$F_{2y}^{(6)} = \frac{wl}{2}, m_3 = \frac{-wl^2}{4}$

Ceux-ci sont obtenus à partir de l'équation matricielle suivante

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{F}_{1y}^{(6)} \\ M_1^{(6)} \\ \mathcal{F}_2^{(6)} \\ M_2^{(6)} \\ \mathcal{F}_{3y}^{(6)} \\ M_3^{(6)} \end{Bmatrix} = \frac{ET}{l^3}) \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6l \\ & & & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & & & 12 & 6l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-wl^4}{24ET} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\{F\} = [K]\{d\} - \{F_0\}$

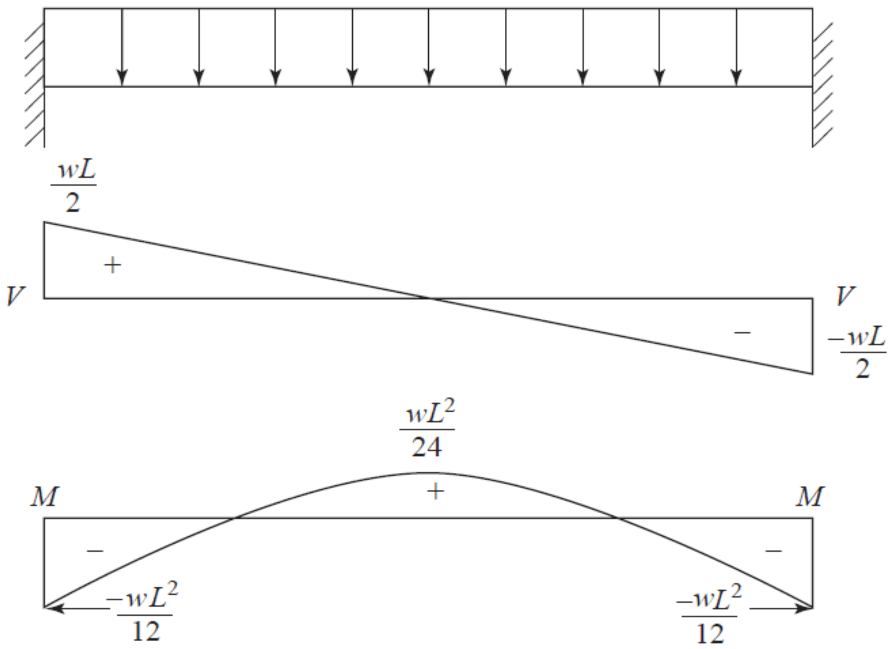
$F_{1y} = \frac{wl}{2} - \left(\frac{-wl}{2}\right) = wl = \frac{wl}{2}$

$M_1 = \frac{wl^2}{4} - \left(\frac{-wl^2}{12}\right) = \frac{wl^2}{3} = \frac{wl^2}{12}$

$F_{2y} = -wl - (-wl) = 0, M_2 = 0 - 0 = 0$

$F_{3y} = \frac{wl}{2}\left(\frac{-wl}{2}\right) = \frac{wl}{2}, M_3 = \frac{wl^2}{12} = \frac{-wl^2}{12} = \frac{wl^2}{12}$

$v_2 = \frac{wl^4}{24ET} = \frac{w(\frac{1}{2})^4}{24ET} \Rightarrow v_2 = \frac{-wl^4}{384ET}$



Partie des exercices avec solution

Exercice 1

Évaluez la matrice de rigidité pour les éléments représentés sur la figure P6-6. Les coordonnées sont données en unités de millimètres. Supposons les conditions de contraintes planes. Soit E = 210 GPa, ν = 0. 25 et t = 10 mm.

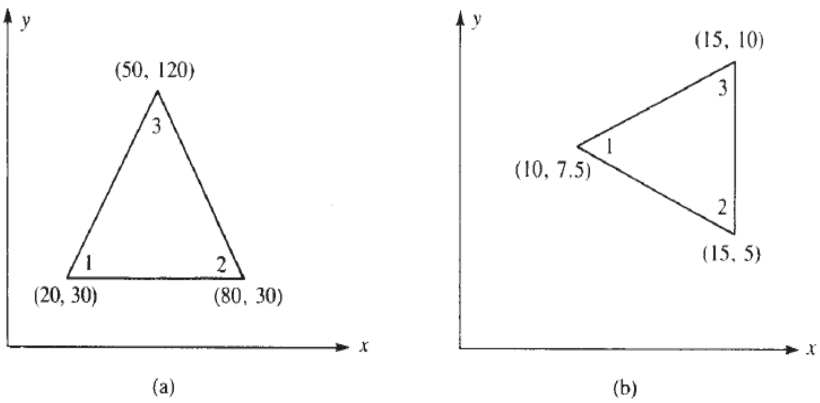
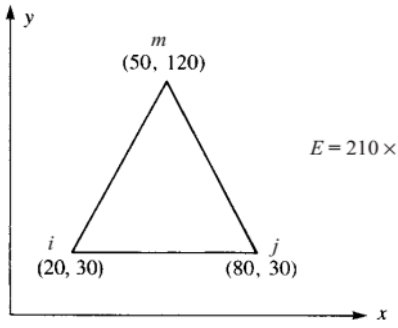


Figure P6-6

Solution

a)



(a)

$E = 210 \times 10^9$ Pa, $\nu = 0.25$, $t = 0.010$ m

$$\beta_i = y_j - y_m = 30 - 120 = -90 \qquad \gamma_i = x_m - x_i = 50 - 80 = -30$$

$$\beta_j = y_m - y_j = 120 - 30 = 90 \qquad \gamma_i = x_i - x_m = 20 - 50 = -30$$

$$\beta_i = y_i - y_j = 120 - 30 = 90 \qquad \gamma_i = x_j - x_i = 80 - 20 = 60$$

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j)$$

$$= 20(-90) + 80(90) + 50(0) = 4500\ \mathrm{mm}^2$$

$$[B] = \frac{1}{5400}\begin{bmatrix} -90 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & -30 & 0 & 60 \\ -30 & -90 & -30 & 90 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{210\times10^9}{1-(0.25)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} = 2.24 \times 10^{11}\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$[k] = tA[B]^T[D][B]$$

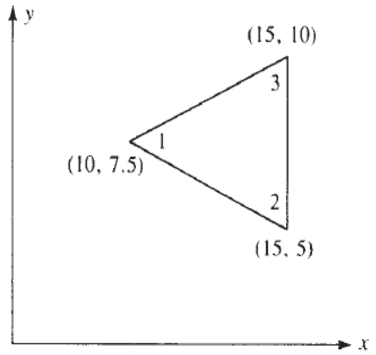
$$[k] = (0.01)\left(\frac{5.4 \times 10^{-3}}{2}\right)\left(\frac{1}{5.4 \times 10^{-3}}\right)\begin{bmatrix} -90 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & -90 \\ 90 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 90 \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}(2.24$$

$$\times 10^{11})\begin{bmatrix} 1 & 025 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix}[\,B]$$

$$[k] = 1.12 \times 10^9 \begin{bmatrix} -90 & -22.5 & -11.25 \\ -7.5 & -30 & -33.75 \\ 90 & 22.5 & -11.25 \\ -7.5 & -30 & 33.75 \\ 0 & 0 & 22.5 \\ 15 & 60 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5.4\times10^{-3}} \begin{bmatrix} -90 & 0 & -30 & 0 & -30 & 90 \\ 0 & -30 & -90 & 0 & 0 & 60 \\ 90 & 0 & -30 & 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k] = 2.074 \times 10^5 \begin{bmatrix} 8437.5 & 1687.5 & -7762.5 & -337.5 & 675 & -1350 \\ 1687.5 & 3937.5 & 337.5 & -2137.5 & -2025 & -1800 \\ -7762.5 & 337.5 & 8437.5 & -1687.5 & -675 & 1350 \\ -337.5 & -2137.5 & -1687.5 & 3937.5 & 2025 & -1800 \\ -675 & -2025 & -675 & 2025 & 1350 & 0 \\ -1350 & -1800 & 1350 & -1800 & 0 & 3600 \end{bmatrix}$$

(b)



(b)

$\beta_i = -5$ $\qquad \gamma_i = 0$

$\beta_j = 2.5$ $\qquad \gamma_j = -5$

$\beta_m = 2.5$ $\qquad \gamma_m = 5$

$$[k] = 4.48 \times 10^7 \begin{bmatrix} 25.0 & 0 & -12.5 & 6.25 & -12.5 & -6.25 \\ & 9.375 & 9.375 & -4.6875 & -9.375 & -4.6875 \\ & & 15.625 & -7.8125 & -3.125 & -1.5625 \\ & & & 27.343 & 1.5625 & -3.125 \\ & & & & 15.625 & 7.8125 \\ & & & & & 27.343 \end{bmatrix}$$

t= 0.01

$A = \dfrac{tA}{2}$ $\qquad\qquad A = 5 \times 10^{-5}$

$[k] = tA[B]^T[D][B]$

[k]

$$
= \begin{bmatrix} 1.225\times10^{9} & 3.5\times10^{8} & -1.015\times10^{9} & -7\times10^{7} & -2.1\times10^{8} & -2.8\times10^{8} \\ 3.5\times10^{8} & 7\times10^{8} & 7\times10^{7} & -1.4\times10^{8} & -4.2\times10^{8} & -5.6\times10^{8} \\ -1.015\times10^{9} & 7\times10^{7} & 1.225\times10^{9} & -3.5\times10^{8} & -2.1\times10^{8} & 2.8\times10^{8} \\ -7\times10^{7} & -1.4\times10^{8} & -3.5\times10^{8} & 7\times10^{8} & 4.2\times10^{8} & -5.6\times10^{8} \\ -2.1\times10^{8} & -4.2\times10^{8} & -2.1\times10^{8} & 4.2\times10^{8} & 4.2\times10^{8} & 0 \\ -2.8\times10^{8} & -5.6\times10^{8} & 2.8\times10^{8} & -5.6\times10^{8} & 0 & 1.12\times10^{9} \end{bmatrix}
$$

Exercice 2

Pour les éléments de déformation plans représentés sur la figure P6-10, les déplacements nodaux sont donnés comme suit : u1 = 0. 005 mm, v1 = 0. 002 mm, u2 = 0. 0 mm, v2 = 0. 0 mm, u3 = 0. 005 mm, v3 = 0. 0 mm.

Déterminez les contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} ,σ_1 et σ_2 et l'angle principal θ_p. E = 70 GPa et ν=0. 3, et utilisez l'épaisseur de l'unité pour la déformation plane. Toutes les coordonnées sont en millimètres.

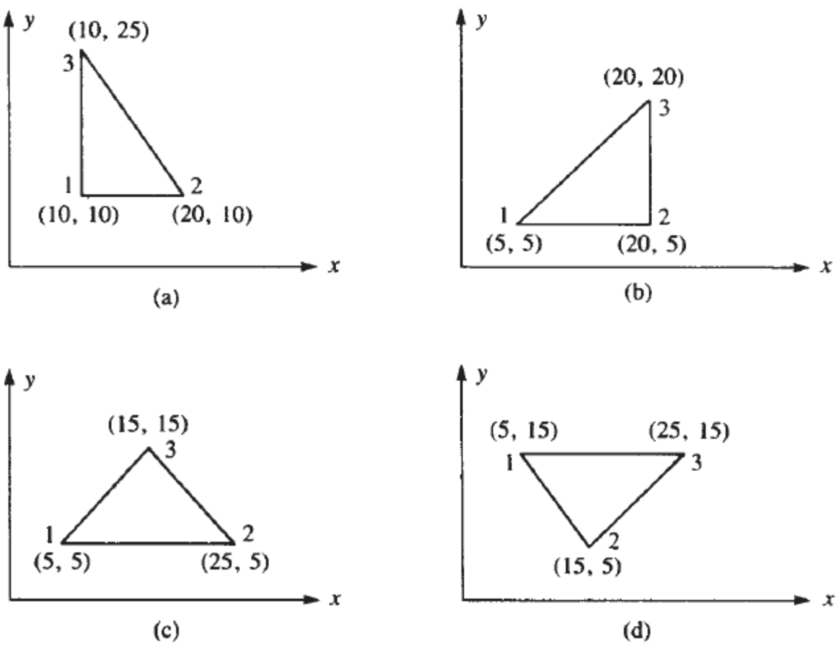
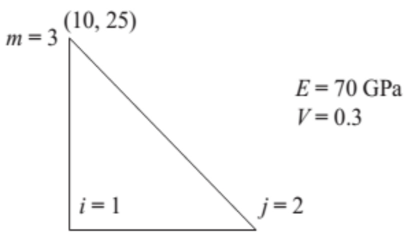


Figure P6-10.

Solution

(a)



$\beta_i = -15$ $\gamma_i = -10$

$\beta_j = 15$ $\gamma_j = 0$

$\beta_m = 0$ $\gamma_m = 10$

$2A = 150\ \text{mm}^2 = 150 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{70 \times 10^6}{(1+0.3)[1-2(0.3)]} \begin{bmatrix} 0.7 & 03 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\times \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -10 & -15 & 0 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.2 \\ 2.0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -52.5 \\ -32.8 \\ -5.38 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

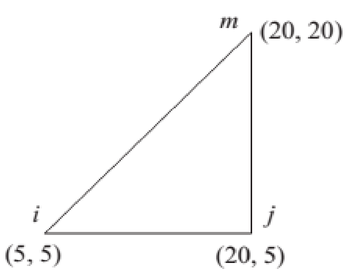
$$\sigma_{1.2} = \frac{-52.5 + (-32.8)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-52.5 + 32.8}{2}\right)^2 + (-5.38)^2} = -42.65 \pm 11.22$$

$$\sigma_1 = -31.4\ \text{MPa} \qquad \sigma_2 = -53.9\ \text{MPa}$$

$$2\theta_p = \tan^{-1} \frac{2(-5.38)}{-52.5 — (-32.8)} = 28.64°$$

$$\theta_p = 14.32°$$

(b)



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 49.4 & 40.2 & 0 \\ & 94.0 & 0 \\ & & 26.9 \end{bmatrix} \frac{1}{225 \times 10^{-6}} \times \begin{bmatrix} -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 \\ 0 & -15 & -15 & 15 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.005 \\ 0.002 \\ 0 \\ 0 \\ 0.005 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\times 10^{-3}$$

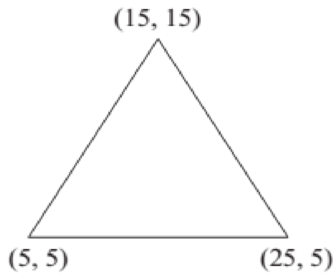
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -31.4 \\ -13.5 \\ 5.38 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

$$\sigma_{1.2} = \frac{-31.4 - 13.5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-31.4 + 13.5}{2}\right)^2 + (-5.38)^2} = -22.44 \pm 10.46$$

$$\sigma_1 = -11.98 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -32.9 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2(-5.38)}{-31.4 + 13.46} = -15.5°$$

(c)



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\frac{70}{1.3 \times 0.4}\right) \begin{bmatrix} 0.7 & 03 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \frac{1}{200}$$

$$\times \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -10 & 0 & 20 \\ -10 & -10 & -10 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27.6 \\ -19.5 \\ 4.04 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

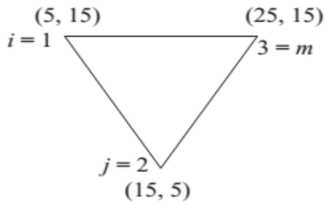
$$\sigma_{1.2} = \frac{-27.6 - 19.5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-27.6 + 19.5}{2}\right)^2 + 4.04^2}$$

$$\sigma_1 = -17.9 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -29.3 \text{ MPa}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2 \times 4.04}{-27.6 + 19.5}\right)$$

$$\theta_p = -22.5°$$

(d)



$$E = 70 \times 10^9 \qquad v = 3 \qquad t = 1$$

$$\gamma_1 = 0.015 \qquad \gamma_2 = 0.005 \qquad \gamma_3 = 0.015$$

$$x_1 = 0.005 \qquad x_2 = 0.015 \qquad x_3 = 0.025$$

$$\beta_1 = y_2 - y_3 \qquad \beta_2 = y_3 - y_1 \qquad \beta_3 = y_1 - y_2$$

$$\gamma_1 = x_3 - x_2 \qquad \gamma_2 = x_1 - x_3 \qquad \gamma_3 = x_2 - x_1$$

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \qquad [D] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix}$$

$$[k] = tA[B]^T[D][B]$$

$$u_1 = 0.000005 \qquad u_2 = 0 \qquad u_3 = 0.000005$$

$$v_1 = 0.000002 \qquad v_2 = 0 \qquad v_3 = 0$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$\{\sigma\} = [D][B]\{d\}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\frac{70}{1.3 \times 0.4}\right) \begin{bmatrix} 0.7 & 03 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \frac{1}{200}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 10 & 10 & 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.05 \\ 0.70 \\ 3.5 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

$\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$$\sigma_{1.2} = \frac{-1.05 - 0.70}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1.05 + 0.07}{2}\right)^2 + 3.5^2}$$

$$\sigma_1 = -3.43 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -3.78 \text{ MPa}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2(-3.5)}{-1.05 + 0.70}\right)$$

$$\theta_p = -38°$$

Exercice 3

Déterminer les déplacements nodaux et les contraintes de l'élément, y compris les contraintes principales, pour la plaque mince de la section 6.5 avec une charge de cisaillement uniforme (au lieu d'une charge de traction) agissant sur le bord droit, comme le montre la figure P6-13. Utilisez E = 30 106 N /mm^2, ν = 0:30 et t = 1 mm.

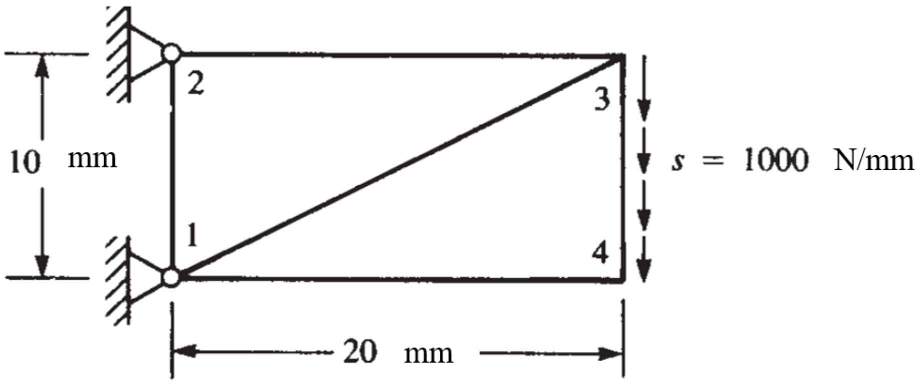
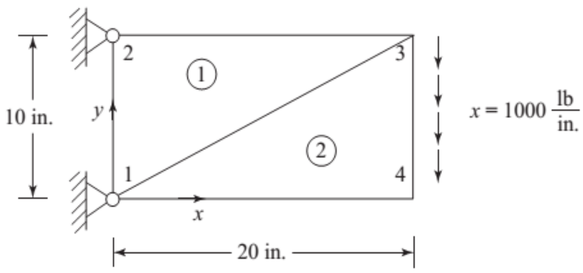


Figure P6-14.

Solution



Reportez-vous à l'exercice 6.2 pour [K]

Avec $u_1=v_1=0,\ u_2=v_2=0$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -5{,}000 \\ 0 \\ -5{,}000 \end{Bmatrix} = \frac{75000 \times 5}{0.91} \begin{bmatrix} 48 & 0 & -28 & 14 \\ & 87 & 12 & -80 \\ & & 48 & -26 \\ \text{Symmetry} & & & 87 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Résolution

$$u_3 = 0.50 \times 10^{-3}\text{in.} \qquad v_3 = -0.275 \times 10^{-2}\text{in.}$$

$$u_4 = -0.609 \times 10^{-3}\text{in.} \qquad v_4 = -0.293 \times 10^{-2}\text{in.}$$

Élément (1)

$\{\sigma\} = [D][B]\{d\}$

$$\{\sigma\} = \frac{30 \times 10^6}{(0.91)(200)}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \times 10^{-3} \\ -0.275 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 824 \\ 247 \\ -1586 \end{Bmatrix} \text{psi}$$

$$\sigma_{1.2} = \frac{824 + 247}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{824 + 247}{2}\right)^2 + (-1586)^2}$$

$$\sigma_1 = 2149 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = -1077 \text{ psi}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-2 \times 1586}{824 - 247}\right)$$

$$\theta_p = -40°$$

Élément (2)

$$\{\sigma\} = \frac{30 \times 10^6}{(0.91)(200)}\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 & 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.609 \times 10^{-3} \\ -0.293 \times 10^{-2} \\ 0.5 \times 10^{-3} \\ -0.275 \times 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -825 \\ 292 \\ -411 \end{Bmatrix} \text{psi}$$

$$\sigma_{1.2} = \frac{-825 + 292}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-825 + 292}{2}\right)^2 + (-411)^2}$$

$$\sigma_1 = 426 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = -960 \text{ psi}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{-2 \times 411}{-825 - 292}\right)$$

$$\theta_p = -18.15°$$